प्रस्तावना.

या भूतलाचे ठायीं प्राणी मात्रांचें उत्तम प्रकारें करून संरक्षण व्हावें, तदर्थ जगन्नियंत्या परम कृपालु प्रभूनें दयालुत्वें करून अनेक पदार्थ निर्माण केले आहेत. त्यांचा, अधिक किंवा उण्या गरजेनें सर्व आप आपलेस्वाकडे, उपयोग करून घेतात. विचार दृष्ट्या पाहिलें असतां कोणत्याही इतर प्राण्यास अगदींच न देतां परमेश्वरानें आपले पूर्ण कृपाभरित-औदार्यानें मनुष्यास विचार शक्ति ही अमूल्य देणगी दिली आहे. तेणें करून, मनुष्यानें आपले तर्क, शोध व ज्ञान वाढवीत असलें पाहिजे, असा सृष्टि कर्त्याचा कृत संकल्प दिसतो.

जगदीश्वरानें उत्पन्न केलेल्या प्राणी मात्रांचा संरक्षणीय पदार्थांत उदक जसें अधिक आवश्यक व महदुपयोगी आहे, तसेंच त्यानें निर्मिलेल्या मानुषीय विचारांस वाढविण्याच्या साधनांत गणित शास्त्र अधिक आवश्यक व महदुपयोगी आहे. गणिताचे योगानें प्रापंचिक व्यवहार चालतो. गणिताचे योगानें द्रव्य वाढणाऱ्या पेढ्या चालतात. गणिताचे योगानें शिल्प शास्त्रांतील तत्वें उघड होतात. गणिताचे योगानें चंद्र सूर्यांचीं ग्रहणें समजतात. व गणिताचे योगानें पृथ्व्यादि ग्रह नक्षत्राचा गति स्थितींचे बोध लागले आहेत. समुद्राची भरती ओहोटी गणितानें समजते. हवेंतील फेर फार गणितानें समजतात. डोंगर व जमिनी यांच्या मोजण्या गणितानेंच करितां येतात. पंचांग गणितानें करितां येतें. फार काय सांगावें, आपले शास्त्रा प्रमाणें गांवास जाणें, येणें, घरें बांधणें, लग्न मुंजी करणें, महदुद्योगास लागणें, आदि करून शुभ कार्यास मुहूर्त ही गणिताधारेंच घेतात. आणि वास्तविक पाहिलें असतां हें जग प्रत्यक्ष गणित व त्याचें उपांग साधारण अनुमान या दोहोंचा योगा

[illegible] करून गणिताचा उपयो
ग आहेच आहे. मग तो राजा असो किंवा रंक असो. अल्पतरी गणिता
भ्यास असल्या विना आपला (मनुष्याचा) व्यवहार चालावयाचा ना
हीं. या गणित शास्त्राचा महत्वा विषयीं असें वर्णिलें आहे.

श्लोक.

शास्त्रें दुजीं निष्फळ सर्व देखा ॥ वादींच त्यांचा उपयोग लेखा ॥
प्रत्यक्ष हें ज्योतिष शास्त्र याची ॥ चंद्रार्क देती वर साक्षि साची ॥ १॥

सारांश ज्योतिष ह्मणजे गणित शास्त्र अत्युपयोगी आहे; यास्तव हल्लींचा आपल्या बहादर इंग्लिश सरकारानें मोठ मोठ्या विद्वान लोकांस आश्रय दिल्यावरून त्यांनीं या विषयावर अनेक भाषेंत ग्रंथ लिहिले, आणि त्यांचा समज सर्वांस होऊन प्रजेनें ज्ञान संपन्न व्हावें, म्हणून भाषांतरादि अनेक उपाय करून तेच विषय उत्तमावस्थेस येत जावे, आणि तेणें करून सर्वांस बाल्यावस्थेंतच या ज्ञानवर्धक विषयाचें अध्ययन होऊन त्या पासून होणारा जो अनुपम लाभ तो प्राप्त होत जावा म्हणून मोठ मोठ्या शहरांतून विद्यालयें स्थापून विद्वान गुरूंच्या द्वारें दयालु सरकार ज्ञान वृद्धीचें काम चालवीत आहे; परंतु अधिक अभ्यास करण्यास किंवा केलेल्या अभ्यासाचा दृढी करणास ग्रंथसंग्रहाची आवश्यकता विशेष असून कित्येक मुलांस व गणित प्रिय लोकांस मोठ्या किमतीचे ग्रंथ गरिबी मुळें घेववत नाहींत; तेणें करून, त्यांचा आशाभंग व पुढील कर्तबगारीचा पाया मजबुदीस कमी असा होतो. तर त्यास सर्वांस घेण्यास सुलभ होऊन त्यांचा सदुद्योगाची धांव पुढें वाढत असावी, या हेतूनें मी ग्रंथ करावयास पुढें सरलों.

हा ग्रंथ सांप्रत चालू असलेल्या गणिताच्या पुस्तकांस माजी पडण्या करितां, किंवा त्यांवर कडी चढविण्या करितां; अथवा आपली प्रतिष्ठा मिरविण्या करि

तें एका पुस्तकांत मिळावें अशी इच्छा २, नवीन ग्रंथकारास सरकारचें उत्तेजन ३, आणि गरीब लोकांचा या कामांतील गैरसोईचें निवारण ४, असे चार उद्देश मनांत आणून मी या कामास हात घातला.

गणिताचे प्रसिद्ध असलेल्या ग्रंथांचें मूलतत्व हेंच माझ्या या नूतन झालेल्या इमारतीचें सामान होय. तरी मी स्वतांच्या शाहाणपणाच्या डौलानें जडी बुद्धी किंवा नकशी काम करून मागील कारागिरांचें कौशल्य छपविलें, असें नाहीं. एवढें मात्र केलें कीं, त्यावरील अडचणरूपी पडदा काढून व कोठें कोठें पाण्याचा हात फिरवून, उजेडांत आणिलें व अधिक स्वच्छ करून त्याकरवीं बालकांचें मन ओढलें जावें असें केलें. व मी आपल्या श्रमानें यःकश्चित् निर्मिलेलीं बाहुलीं त्यांतच परंतु ओळखूं येतील अशीं निराळीं ठेविलीं आहेत. ह्मणजे मूळ ग्रंथांतील प्रत्येक प्रकरणा प्रकरणाचा व्याख्या व उपपत्ती, त्याच प्रकारें लिहून त्यांस मजबुदी आणण्याकरितां त्या त्या विषयावर इतर संस्कृतादि भाषेंतील आधार मिळाले ते त्या खालीं लिहून तत्संबंधी मीं आपले अभिप्राय खालीं टिपेमध्यें दाखल केले आहेत व माझ्यानें करवला तितका हा ग्रंथ मी बालबोध केला आहे यांत अंकगणित, बीजगणित, लाघ्रतम व रेखागणित यासंबंधीचा संग्रह असून कठीण विषय उपपत्तिसहित लिहिले आहेत. व हा ग्रंथ सर्वांस सुलभ उपायें करून उपयोगीं पडून ज्ञानवृद्धीचें काम अधिक उमेदीनें चालावें ह्मणून किंमत १॥ रुपया ठेविली आहे. ही यांतील प्रत्येक भागावर जे पूर्वीं झालेले ग्रंथ आहेत त्या सर्वांचे किंमतीशीं आणि या किंमतीशीं तारतम्य भावानें पाहूं लागलें असतां ही किती अल्प आहे हें सहज ध्यानांत येईल.

याचा विचार करितां प्रकरणा प्रकरणाचा रीतीचा मागील ग्रंथां
क पाल्हाळ१, या कामीं खर्च होणाऱ्या द्रव्यावरीुन फायदा व उदाह
णाचें भारूड २ यातीही वर कटाक्ष ठेवावा अशी माझी खात्री झाली
कारण पाल्हाळ कमी करून रीति थोडक्यांत लिहिल्या तर हेतु खरी
मुलांचे ध्यानांत येतो; किंमत थोडी आकारली तर घेण्यास उमेद ये
व उदाहरणें या चल वस्तु मानिल्या, कां कीं सांगणाराचें कौशल्या प्र
माणें त्यांत तऱ्हेतऱ्हेचे शेंकडों भेद करितां येतात ह्मणून रीति या अ
चल व सार्वकालिक वस्तु समजून त्या विषयींचे आवश्यक विचार
विस्तृत लिहिले आणि त्यांचीं चल अशीं जीं उदाहरणें तीं बहुत लि
हिण्यांत मात्र फारसा भर दिला नाहीं. सारांश या उद्देशें करून मीं हा
ग्रंथ तयार केला, त्याचा खरोखर उपयोग प्रचारांत यावा ह्मणून मी
कृपाळु प्रभूची नम्रतेनें प्रार्थना करीत आहें.

या ग्रंथांत व्याकरण दोष, रीतीचा अपुरतेपणा व इतर कांहीं चुका
असतील तर त्या विषयीं विद्वानानीं मला क्षमा करावी. आणि तें म
ला सर्व कळवावें; ह्मणजे समयीं दुसरी आवृत्ति छापणें झाल्यास
मी तीं सुधारीन.

श्लोक.

(चाल केकावलीची)

सुखां गणित तोष कां रुचिर मिष्ट व्हावें असें॥
स्मरोनि हरिपाद हें गणित सार केलें असे॥
घनें सुलभ सुश्रमें ह्मणुनि आदरा या करीं॥
विनंति शिवरामस्या तनय भास्कराचा करी॥१॥

गणितसार.

अंकगणित.

भाग पहिला.

पूर्णांक.

गणित ह्मणजे गणण्याची विद्या.

संख्या लिहिण्याच्या रीतींत मूळ अंक नऊ आणि एक शून्य आहे.
वाचक शब्द ... एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नऊ, शून्य.+
अंकांच्या खुणा. १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, ०

हे नऊ अंक वेगवेगळे असतां, आपआपला अर्थ (किंमत) दाखवितात, परंतु हे जेव्हां एके ठिकाणीं संयोग पावतात, तेव्हां स्थानाप्रमाणें आपआपला अर्थ भिन्न दाखवितात.

उदाहरण.

जेव्हां एकाचा अंक (१) असा एकदा लिहिला आहे, तेव्हां त्याचा अर्थ एकच. आणि जेव्हां या अंकाच्या उजवीकडे दुसरा अंक याप्रमाणें (११) लिहिला, तेव्हां प्रथम अंक दुसरे स्थान भूत होऊन त्याचा भाव स्वतः एकच नाहीं; परंतु एक दशक ह्मणजे दहा असा होतो. आणि हे दोन अंक मिळून भाव अकरा. जर उजवीकडे आणखीं याप्रमाणें एक अंक (१११) लिहिला, तर प्रथम अंकाचा अर्थ एक शतक ह्मणजे शंभर असा होतो.

+ नुसते शून्याला कांहीं किंमत नाहीं; परंतु जेव्हां तें अंकावर येतें, तेव्हां तें मूळ अंकाची किंमत दसपट करितें.

आणि हे तीन अंक मिळून एकशें अकरा होतात.

जर एकाद्या अंकस्थानांत मूळ अंक नसला, तर त्या बद्दल शून्य (०) असें लिहितात. पुढील कोष्टकांत अंकांचा स्थलभेदें करून अर्थ भेद दाखविला आहे.

संख्या कोष्टक.

परार्ध	मध्य	अंत्य	जलधि	शंकु	महापद्म	निखर्व	खर्व	अब्ज	दशकोटि	कोटि	दशलक्ष	लक्ष	दशसहस्र	सहस्र	शत	दश	एक
९	७	२	५	६	८	१	४	२	७	५	३	७	९	६	१	८	४

अथवा.

दशपद्म	पद्म	दशखर्व	खर्व	दशअब्ज	अब्ज	दशकोटि	कोटि	दशलक्ष	लक्ष	दशसहस्र	सहस्र	शत	दश	एक
३	८	४	९	७	४	५	१	२	६	९	३	१	८	५

एकं ह्मणजे एक अंकस्थान. १ पासून ९ पर्यंत कोणती ही संख्या. दहं ह्मणजे दोन अंकस्थानें. १० पासून ९९ पर्यंत जाणावी. शतं ह्मणजे तीन अंकस्थानें. १०० पासून ९९९ पर्यंत. या प्रमाणें पुढें ही जाणावी.

हें कोष्टक विद्यार्थ्यांस मुखोद्गत उलट सुलट येत असावें.

वाच्यसंख्या.	वाचक शब्द.
३०५००१४०२२	तीन अब्ज पांच कोटि चवदा हजार बेवीस.
७१०००५००१०५	सात खर्व एक अब्ज पांच लक्ष एकशें पांच.
२००८०३१००००२७	दोन निखर्व ऐशीं कोटि एकतीस लक्ष सत्तावीस.

अथवा.

३५ पस्तीस.

५१२ पांचशें बारा.

४०१५ चारहजार पंधरा.

५०२०३ पन्नास हजार दोनशें तीन.

६०४११३ सहा लक्ष चार हजार एकशें तेरा.

९०५०३०९ नव्वद लक्ष पन्नास हजार तीन शें नऊ.

३४५१६००५ तीन कोटी पंचेचाळीस लक्ष सोळा हजार पांच.

४८०००३००१ अठ्ठेचाळीस कोटि तीन हजार एक.

७०१०००००५१० सात अर्व एक कोटि पांच शें दाहा.

या वाचक शब्दांवर दृष्टि न देतां, केवळ अंकसंख्या वाचावी. तसेंच अंकावर दृष्टि न देतां, वाचक शब्दांवरून अंक संख्या मांडीत जावी.

मिळवणी.

मिळवणी ह्मणजे वेगळाल्या संख्यांची एकंदर बेरीज करणें.

रीति.

वेगळाल्या संख्या एकं खालीं एकं, दहं खालीं दहं, शतं खालीं शतं, अशा रीतीनें लिहाव्या; नंतर शेवटचे संख्ये खालीं एकरेघ काढावी; आणि खालचे संख्ये पासून सर्व संख्यांचे एकं स्थानचे अंक एकत्र मिळवून, त्यांत पहिला अंक असेल, तो एकंचे स्थानीं रेघे खालीं मांडावा. राहिला दुसरा अंक दहं तो हातचा समजून, तो व दहं स्थानचे सर्व अंक मिळून, त्यांतील पहिला अंक दहंचे स्थानीं लिहावा; दुसरा अंक असल्यास, तो हात

चा समजून शतंचे स्थानांत मिळवावा. या प्रमाणें मिळवितां, शेवटीं-अंक येईल, तो तसाच लिहावा; ह्मणजे एकंदर बेरीज झाली.

उदाहरणें.

(१) एका घरांत ४ पुरुष, ६ बायका आणि ८ मुलें आहेत, तेव्हां एकंदर मनुष्यें किती?

उत्तर, १८ मनुष्यें.

(२) एका तारवाची किंमत १०३९ रुपये आणि त्यांतील मालाची किंमत २९३ रुपये. तेव्हां माल सुद्धां त्या तारवाची किंमत किती?

तपशील.

सहस्र	शतं	दहं	एकं	
१	०†	३	९	तारवाची किं॰
	२	९	३	मालाची किं॰
१	३	३	२	एकंदर रुपये.

३ आणि ९ मिळून १२ ह्मणजे एक दशक आणि २ एकं या स्तव २ रेघे खालीं एकंचे स्थळीं मांडावे; आणि उरलेला १ दहं हातचा, तो आणि ९ मिळून १०, १० आणि ३ मिळून १३, यांतील पहिला अंक ३ दहं, तो दहंचे स्थानीं मांडून, हातचा एक शतं, तो व २ मिळून ३ शतं, ते शतंचे स्थानीं मांडावे, बाकी एक सहस्राचा एक सहस्र.

अथवा ३ आणि ९ बारा, बारीं २, हातचा एक दशक १ आणि ९ दाहा, १० आणि ३ तेरा, तेरीं ३, हातचा एक शतक. १ आणि २ तीन, तिहींचे तीन, एकाचा एक.

ताळा.

प्रथम रीति – असे खालून वर अंक मिळविले, तसे वरून खालीं मिळवावे, तेच अंक आले तर बेरीज खरी.

† नुसते शून्याला स्वतः कांहीं किंमत नाहीं म्हणून तें जर एकादे अंकांत मिळविलें अथवा त्यांत एकादा अंक मिळविला तर, कांहीं फेरफार होत नाहीं.

दुसरी रीति– बेरीज केल्यानंतर वरची अथवा त्यांतील कोणती ही एक रकम सोडून, बाकी रकमांची बेरीज घ्यावी; नंतर त्या बेरजेशीं सोडलेली रकम मिळवावी, आणि बेरीज पूर्व बेरजे बराबर आली ह्मणजे बेरीज खरी.

उदाहरणें.

(१)		(२)
४९०५३२३६०३		६८३००५०००
२०३९८०३०७		१८९७८१२२
२८०७९११०३९		९३७५०२५
७८६५०४३२		१४००५७०८१
७९९५८६५३८१	बेरीज	८५१४१५२२९
३०९०५४१७७८	प्रथम रकम सोडून बे.	१६८४१०२२९
७९९५८६५३८१	सोडलेली रकम मि॰बे.	८५१४१५२२९

तिसरी रीति– प्रत्येक रकमेंतील अंकांचे बेरजेंतून जितके वेळां नऊ निघतील तितके वेळां काढून त्या सर्व बाक्यांचे बेरजेंतूनही नऊ नऊ टाकावे, बाकी राहिलेले अंक व बेरजेचे अंकांचे बेरजेंतून नऊ नऊ टाकून राहिलेले अंक बराबर येतील तर बेरीज खरी.

टीप. या रीतीस हा एक बाध आहे कीं, बेरजेंत कांहीं नवाचे अंक अथवा ज्यांची बेरीज नऊ होते असे अंक किंवा शून्ये कमी अथवा जास्त पडलीं असतां चूक समजणार नाहीं, असेंच वजा बाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांचे ताळ्या विषयीं समजावें.

उदाहरणें.

(१)	नऊ टाकून बाकी.		(२)
३६७५६३	३	८	८५६४०३
५५१०९	१	२	१७२०९२
३५०१५४	०	१	३४१८८४
७७३६२६	४	२	२१७०३७९

यातीन रीतींत पहिली रीति चांगली.

अभ्यासाकरितां
उदाहरणें.

(१) ५७९३४१, ३५९२७९८, ७३२१५४५, ३६८६१५२, २५६१३ यांची बेरीज कर.

(२) ३६९८७६, ५४३९८७३, ८७४३२९, ८६१७२७५ यांची बेरीज कर.

(३) १८७५४२३५, ७९८५४२६, २९८१५२२, ४५६८३६४ यांची बेरीज कर.

(४) कृतयुग १७२८०००, त्रेतायुग १२९६०००, द्वापारयुग ८६४०००, कलियुग ४३२००० वर्षे तेव्हां चार ही युगांची एकंदर वर्षे किती होतील?

(५) हा खालील कोष्ठक बेरजे करितां आहे, यांत आडव्या उभ्या तिर्कस इत्यादि आठ आठ कोष्ठकांतील अंकांचा बेरजा घेतल्या असतां बरोबर अशा बेरजा २०० हून जास्त होतात.

६३९४१३	९७२७२८	२८१४०८	५४०६५३	६२७०६८	१८५०७३	२९३७५३	५२८२०८
४७८९२८	३४३१३२	८३६९३३	७७५२०८	४११२७३	३३०७८८	८९४५८८	७८७५५३
९३५६९३	६७६४४८	५७७६८८	२४४३७३	९२३३४८	६८८७९३	५९००३२	२३२०२८
३८०१६८	४४१८९३	७३८७३	८७३९६८	३९२५१३	४२९५४८	७२५८२८	८८६३१३
६५१७५८	९६०३८३	३६९०६३	५५३९१८	६१४७२३	९९७४१८	३०६०९८	५१५९६३
४६६५८३	३५५४७८	८४९२७८	७६२८६३	५०३६१८	३१८४४३	८१२२४३	७९९८९८
९४८०३८	६६४१०३	५६५३४३	२५६७१८	८११००३	७०११३८	६०३३७८	२१९६८३
३६७८२३	४५४२३८	७५०५१८	८६१६२३	४०४८५८	४१७२०३	७१३४८३	८९८६५८

वजाबाकी.

वजाबाकी ह्मणजे दोन रकमांचें अंतर समजण्यासाठीं एका रकमें तून दुसरी रकम काढणें- या अंतरास बाकी असें म्हणतात.

रीति.

दोहों संख्यां मध्यें जी मोठी असेल, ती वर मांडावी, आणि लहान असेल ती तिचे खालीं, एकं खाली एकं, दहं खालीं दहं, अशा क्रमानें मांडून, खाली रेघ काढावी; नंतर खालचे संख्येंतील उजवे कडच्या शेवटील अंक त्याचा वरचा अंकांतून बाद करून, बाकी राहील ती रेघे खालीं मांडावी. याप्रमाणें डावे कडे करीत चलावें. जर खालचा अंक वरचा अंकापेक्षां अधिक असेल, तर वरचे अंकाचेडावे कडील स्थानचा एक ह्मणजे या स्थानचे दहा उसने घेऊन वरचा अंकांत मिळवावे, आणि त्यांतून खालचा अंक बाद करून बाकी काढावी. दशक उसना घेतला आहे, तो हातचा एक खालचा रकमेंतील दुसऱ्या अंकांत मिळवून तो वरचे अंकांतून बाद करावा. याप्रमाणें शेवट पर्यंत करीत जावें.

कोणत्या ही संख्येंतून शून्य वजा केलें असतां, त्या संख्येंत कांहीं बदल होत नाहीं; परंतु शून्यांतून कोणती ही संख्या वजा केली असतां, अंकांचा बदल न होतां, चिन्हाचा मात्र बदल होतो. या विषयीं विचार दुसरे भागांत आहे.

+ उसना घेतला दशक तेव्हांच त्या स्थानांतून वजा करावा हा उत्तम पक्ष, परंतु त्यांतून दुसरे अंक वजा करावयाचे असतात; याजकरितां त्यांत हा दशक मिळवून एकदम वजा केला तरी चालेल.

उदाहरणें.

(१) २५८३२ यांतून ९८६१ हे वजा कर. (२) ३६७८९२० मो॰ सं.

२५८३२	मोठी संख्या.
९८६१	लहान सं॰
१५९७१	बाकी.

३६७८९२०	मो॰ सं.
९७३३२६	ल॰ सं.
२७०५५९४	बा.

(३) शिवाजी राजा सन १६२७ त जन्मला, आणि त्यास राज्याभिषेक १६७४ त झाला, व तो १६८० त मेला. त्यास सन १८५८ मध्यें जन्मून, व राज्याभिषेक होऊन, व मरून, किती वर्षे झाली? व जन्मल्या पासून किती वर्षांनी राज्याभिषेक झाला? आणि जन्मल्या पासून, व राज्याभिषेक झाल्या पासून किती वर्षांनीं मरण पावला? तें सांग.

उत्तर { जन्मून २३१ वर्षे, रा॰ १८४, म॰ १७८ ; ज॰ रा॰ ४७, ज॰ म॰ ५३, रा॰ म॰ ६ }

ताळा.

प्रथम रीति — बाकी लहान संख्येंत मिळवावी. ती बेरीज मोठे संख्ये बराबर आली ह्मणजे वजाबाकी खरी.

दुसरी रीति — दोन्ही रकमांतील अंकांचे बेरजेंतून नऊनऊ टाकून त्या बाक्यांची वजाबाकी करावी; ही बाकी व मुळचे बाकींतील अंकांचे बेरजेंतून नऊनऊ टाकून राहिलेली बाकी बराबर आली तर वजाबाकी खरी. कदाचित् मोठे रकमेची बाकी लहान आली, तर तींत नऊ मिळवून त्यांतून लहान रकमेची बाकी वजा करावी.

उदाहरणें.

(१)		(२) नऊ नऊ टाकून बाकी.	
२५२५३२१४ ..	मोठी संख्या.	३८९७५६४८ ..	५
१६२६९९२५ ..	लहान संख्या.	९२५२४५० ..	१
८९८३२८९ ..	बाकी.	२९६२३१९८ ..	४
२५२५३२१४ ..	ताळा.		

गुणाकार.

गुणाकार ह्मणजे मिळवणीची संक्षेप रीति आहे. अशी कीं, जितके वेळां एका रकमेंत एक हा अंक आहे तितके वेळां दुसरी रकम मांडून मिळवणी किती होईल हें करणें.

व्याख्या.

१ गुणाकारांत तीन पदें आहेत, गुण्य, गुणक आणि गुणाकार.

२ जी रकम कितीएक वेळां मांडावयाची तिला गुण्य ह्मणावें.

३ ती रकम जितके वेळां मांडावयाची त्या वेळांकास गुणक ह्मणावें.

४ गुणक वेळां गुण्य मांडून त्यांची जी बेरीज त्यास गुणाकार ह्मणावें.

रीति.

गुण्य आणि गुणक एकं खालीं एकं, दहं खालीं दहं असे लिहावे; आणि त्या खालीं रेघ काढावी. मग गुणकाचे एकंचे स्थळींचे अंकानें सर्व गुण्य गुणून, तो गुणाकार रेघे खालीं त्या त्या अंकाचे समोर लिहावा. नंतर याच प्रमाणें दुसरे गुणकांकानें गुणून तो गुणाकार त्या गुणकांकाचे खालचे स्थळापासून डावेकडे मांडीत जावा.* अशा रीतीनें गुणकां

* एकंला एकंनें गुणिलें असतां, गुणाकार एकं, दहंनें गुणिलें असतां दहं, शतंनें

क जितके असतील, तितक्या गुणाकाराच्या पंक्ति होतील. नंतर त्याखा
लीं रेघ काढून त्यासर्व पंक्तींची बेरीज घ्यावी; ह्मणजे गुणाकार झाला.

पुढें लिहिलेलें वीस अंकांचे कोष्ठक दाहापर्यंत संख्यांचे गुणाकार दा
खवितात. ते मुलांनीं तोंडपाठ करावे.

कोष्ठक.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४	२६	२८	३०	३२	३४	३६	३८	४०
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६	३९	४२	४५	४८	५१	५४	५७	६०
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८	५२	५६	६०	६४	६८	७२	७६	८०
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०	६५	७०	७५	८०	८५	९०	९५	१००
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२	७८	८४	९०	९६	१०२	१०८	११४	१२०
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४	९१	९८	१०५	११२	११९	१२६	१३३	१४०
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६	१०४	११२	१२०	१२८	१३६	१४४	१५२	१६०
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८	११७	१२६	१३५	१४४	१५३	१६२	१७१	१८०
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०	१३०	१४०	१५०	१६०	१७०	१८०	१९०	२००

लेखें, अकर्की, एकोत्री, पावकीं, निमकीं, पाउणकीं, इत्यादि हे सर्व गुणा
कार आहेत; जसें सत्राचोक ६८ ह्मणजे सत्रा चार वेळां, तसें तेरासवे १७.
ह्मणजे सवा ही रकम तेरा वेळां घेतली. तसेंच बत्तीस बत्तीस १०२४ ह्म
णजे बत्तीस वेळां बत्तीस घेतले. याजकरितां हे सर्व गुणाकार अवश्य
ध्यानांत ठेविले पाहिजेत.

शून्याला कोणत्या ही संख्येनें गुणिलें असतां, गुणाकार शून्य; कार

गुणिलें असतां शून्य होतो; याजकरितां गुण्यांतील एकेला गुणकांतील ज्याज्या स्था
नचे अंकानें गुणावें त्यात्या स्थानचा गुणाकार होतो, ह्मणून तो त्यात्या स्थानापा
सून मांडण्यास आरंभ करावा.

स्येला शून्यानें गुणिलें असतां शून्य.

शून्याला शून्यानें गुणिलें असतां, गुणाकार शून्य, ह्मणजे शून्य वेळां शून्य ह्मणजे कांहीं नाहीं.

जर गुण्य व गुणक किंवा यांतून कोणत्या ही संख्येचे उजवे कडे कांहीं शून्यें असतील, तर त्या शून्यां वांचून बाकी मागील अंकांचा गुणाकार करावा. आणि त्या गुणाकारावर त्या त्या स्थानचीं तितकीं शून्यें मांडावीं.

उदाहरणें.

(१) ६९५१२ हे गुण्य यांस ३६५ या गुणकानें गूण.

```
      ६९५१२ हे गुण्य.
        ३६५ गुणक.
     ------
     ३४७५६०
    ४१७०७२
   २०८५३६
  --------
  २५३७१८८० गुणाकार.
```

(२)

```
४२५ ... गुण्य.
  ० ... गुणक.
  ० ... गुणाकार.
```

(३)

```
  ० ... गुण्य.
२१७ ... गुणक.
  ० ... गुणाकार.
```

(४)

```
० ... गुण्य.
० ... गुणक.
० ... गुणाका.
```

(५)

```
गुण्य. ........ ४३००
गुणक. ........ ३५००
               ----
               २१५
              १२९
         ----------
गुणाकार. १५०५००००
```

ताळा.

प्रथम रीति. गुण्याचे ठिकाणीं गुणक, आणि गुणकाचे ठिकाणीं गुण्य मांडून गुणाकार करावा, दोन्ही गुणाकार बरोबर आले तर गुणाकार खरा.

दुसरी रीति- गुण्य आणि गुणक यांतील अंकांचे बेरजेंतून जितके वेळां निघतील तितके वेळां नऊनऊ बाद करून, दोन्ही बाक्या गुणाव्या: या गुणाकारांतील व पूर्वीचा गुणाकारांतील अंकांचे बेरजेंतून पृथक् पृथक् नऊनऊ बाद करून दोन्ही बाक्या बराबर आल्या तर गुणार खरा.

तिसरी रीति- गुण्य किंवा गुणक यांतील एका पदानें गुणाकार भागिला असतां, दुसरें पद निघेल तर गुणाकार खरा; परंतु हें भागाकार शिकल्या पूर्वी समजावयाचें नाहीं.

उदाहरणें.

(१)

		अथवा.
६४४०१	·· गुण्य ··············	५६७४
५६७४	·· गुणक. ··············	६४४०१
२५७६०४		५६७४
४५०८०७	६	
३८६४०६	६ ✕ ४	२२६९६
३२२००५	६	२२६९६
		३४०४४
३६५४११२७४	गुणाकार. ·······	३६५४११२७४

गुणाकाराविषयीं आणखीं विचार.

(१) जर गुणक मोठा असेल, आणि त्याचे गुण्य गुणक रूप दोन अथवा अधिक अवयव होतील, तर करावे; नंतर एका अवयवानें गुण्यास गुणून त्या गुणाकारास दुसरे अवयवानें गुणावें, याप्रमाणें जितके अवयव असतील त्यांणीं गुणावें. जसें १ रुपयाचे १६ आणे, तर २४ रुपयांचे किती होतील? चोहोंस सहानीं गुणिलें असतां २४ होतात,

किंवा आठांस तिहींनीं गुणिलें असतां ४८ होतात, याजकरितां सोळां ला प्रथम ४नीं गुणून, त्या गुणाकाराला ६नीं गुणावें; किंवा प्रथम ३नीं गुणून नंतर ८नीं गुणावें.

(२) जर गुणकाचे गुण्यगुणकरूप अवयव बरोबर होत नाहींत, तर त्याहून कमी किंवा जास्त जवळचे अंकाचे गुण्यगुणकरूप अवयव करून, त्यांणीं वर सांगितल्याप्रमाणें गुणावें. नंतर ते अवयव कमी अंकाचे झाले असल्यास, तो अंक गुणकापेक्षां किती कमी असेल, तितके अंकानें गुण्य गुणून तो गुणाकार पूर्वगुणाकारांत मिळवावा. आणि जास्त अंकाचे अवयव झाले असल्यास वजा करावा.

उदाहरणें.

(१) ५३९३२५ हे गुण्य यांस ५८ या गुणकानें गूण. एथें ५८ म्हणजे ७ वेळां आठ अधिक २ तेव्हां.

```
 ५३९३२५         ३२५
       ७           २
 -------         ---
३७७५२७५          ६५०
       ८
--------
३०२०२२००
     ६५०
--------
३०२०२८५०  हा इच्छिला गुणाकार.
========
```

(२) ४०३५ हे गुण्य यांस २५६ या गुणकानें गूण.

```
   ४०३५
      ८
  -----
  ३२२८०
      ८
 ------
 २५८२४०
      ४
-------
१०३२९६०  गुणाकार.
=======
```

(३) ७४३९ हे गुण्य यांस ६७ या गुणकानें गूण.

```
  ७४३९         ७४३९
     ८            ३
 -----        -----
 ५९५१२        २२३१७
     ८
------
४७६०९६
 २२३१७  हे वजा
------
४९८४१३  गुणाकार.
```

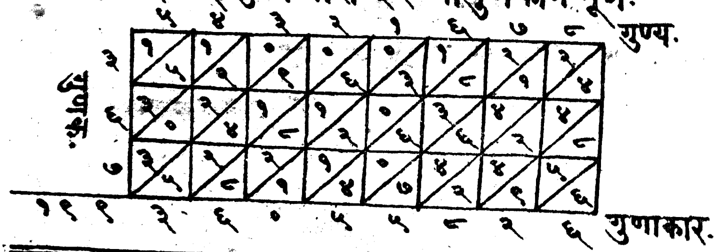
*ह्या दोन ही रीतींत सांगितल्याप्रमाणें केलेले गुणाकारास संक्षेप अथवा तुकडी गुणाकार म्हणतात.

कोष्ठकी गुणाकार.

उदाहरणांत लिहिल्या प्रमाणें गुण्य गुणक मांडून, गुणाकार करावा. कोण त्याही अंकानें गुणते वेळीं गुणाकार एकच अंक आल्यास तो कोष्ठकांत उजवीकडे लिहावा; आणि दुसरा अंक आल्यास त्याच कोष्ठकाचे दुसरे भागांत डावीकडे लिहावा. गुणाकारास आरंभ करणें तो गुणकाचे भारी अंक स्थळापासून करावा. बेरीज करणें ती समोरन करितां तिर्कस पंक्तीची करावी.

उदाहरणें.

५४३२१६७८ हे गुण्य यांस ३६७ या गुणकानें गूण.



(२) १४९१२७ हे गुण्य यांस ७९२८ या गुणकानें गूण.

उत्तर. ११८२२७८८५६

बैठा गुणाकार.

बैठा गुणाकार ह्मणजे प्रत्येक स्थानच्या गुणाकार एकदम पुराक रीत आणें. या गुणाकारांत हा एक लाभ आहे कीं, गुणकांतील अंक संख्ये इतक्या गुणाकाराच्या पंक्ति होत नाहींत.

रीति.

गुण्यांतील एकंच्या स्थानाला गुणकांतील एकंच्या स्थानानें गुणावें.

गुणाकार एकंस्थळा खालीं मांडावा; हातचा आल्यास तो दहं, निराळा मांडावा; आणि गुणकांतील दहंनें गुण्यांतील एकंमास व गुण्यांतील दहंनें गुणकांतील एकंमास गुणून, दोन गुणाकारांची बेरीज घेऊन, त्यांत हातचा मिळवून बेरीज येईल तो दहं, त्यांतील प्रथम अंक दहं खालीं मांडून हातचा आल्यास तो शतं, नंतर शतंचा स्थानचे जितके गुणाकार उत्पन्न होतील, ते व हातचा अंक मिळवून त्यांतील प्रथम अंक शतंचे स्थानीं मांडावा. हातचा येईल तो सहस्र याप्रमाणें करीत जावें. खालीं उदाहरणांत तपशील केला आहे तो पहा.

उदाहरणें.

(१) ४३१८ हे गुण्य यांस ९३२ या गुणकानें गूण.

४३१८ गुण्य.
९३२ गुणक.
४०२४३७६ गुणाकार.

तपशील.

१६
१ हातचा दशक.
२४
२
२७
२ हातचे शतक.
७२
३
६
८३

८ हातचे सहस्र.
९
९
८
३४
३ हातचे दशसहस्र.
२७
१२
४२
४ हातचे लक्ष.
३६
४०

(२) ३८५७९२ हे गुण्य यांस २५०६८ या गुणकानें गूण.

उत्तर. १२१४२१६१८

ज्योतिषी गुणाकार.

ज्योतिषी गुणाकार हा वैठ्या गुणाकारा प्रमाणेंच आहे. भेद इतकाच कीं, वैठे गुणाकारांत अति हलके अंकस्थाना पासून प्रत्येक स्थानचा गुणाकार पुरा करीत जाणें; आणि यांत भारी अंकस्थाना पासून प्रत्येक स्थानचा गुणाकार पुरा करीत जाणें. खालीं उदाहरणांत तपशील केला आहे, तो पहा. परंतु गुणाकार करत्ये वेळीं असा तपशील करीत नाहींत+; गुणाकार गुण्याचे ओळीस जेव्हांचे तेव्हांच मांडून हातचे ही लागलेच मिळवितात. यांत प्रति खेपेस गुण्याचें डावे कडील एकेक स्थान पुसून गुणाकाराचें पहिलें पद त्या त्या स्थानीं मांडितात.

उदाहरणें.

(१) ४३६५ हे गुण्य यांस २५३ या गुणकानें गूण.

४३६५ गुण्य.
२५३ गुणक.
११०४३४५ गुणाकार.

तपशील.

२१२
८०१२३६५
२५३

१
६५०
१०१२४६५
२५३

३१
१२०८
११०३०८४५
२५३

२१
१०५५
११०३०८४५
२५३
११०४३४५ गुणाकार.

(२) ३४१२ वर्षांचे दिवस किती? जर एकवर्षाचे ३६० तर.

उत्तर. १२२८३२०

+ असा तपशील रीति समजण्या साठीं मात्र एथें केला आहे.

(१) ४८४६० यांस १२८,१५७९, ६४१६७ या गुणकांनीं गूण.

(२) ३४५६७६७ यांस ४५३२, ७३२६, ९८०३५, १८५७१२, ५७१२, ५७६००० या गुणकांनीं प्रत्येकीं गूण.

(३) एक पैशास १३ आंबे आणि ७ केळीं मिळतात. तर ३२ पैशांस किती मिळतील?

उत्तर ४१६ आंबे आणि २२४ केळीं.

(४) एक मिन्युटांत एक मनुष्य बंदुकीचे चार आवाज काढितो, या प्रमाणें ४३२ मनुष्यें तीन अवर (१८० मिन्युटें) पर्यंत लढत असतां एकंदर किती आवाज काढितील?

उत्तर ३११०४० आवाज.

(५) एका देवळाची प्रदक्षिणा ६३५२ पावलें आहे. आणि एक मनुष्य त्या देवळास दररोज ११ प्रदक्षिणा घालितो, तर नऊ दिवसांत तो किती पावलें चालेल. व त्याच्या किती प्रदक्षिणा होतील?

उत्तर ६२८८४८ पावलें आणि ९९ प्रद०

भागाकार.

भागाकार ह्मणजे वजाबाकीची संक्षेप रीति आहे. एका संख्येमध्यें दुसरी संख्या किती वेळां आहे, अथवा तींतून किती वेळां निघते हें पहाणें, यास भागाकार ह्मणावें.

या वजाबाकींत मुळचीं दोन पदें असतात आणि त्यांपासून दुसरीं दोन उत्पन्न होतात, मिळून चार. त्यांचीं नावें: भाज्य, भाजक, भागाकार

आणि बाकी.

व्याख्या.

१ जा रकमेंतून दुसरी रकम किती वेळां वजा होते हें पाहावयाचें तिला भाज्य ह्मणावें.

२ जी वजा करावयाची तिला भाजक ह्मणावें.

३ भाज्यांतून भाजक जितके वेळां वजा झाला, त्या वेळांकास भागाकार ह्मणावें.

४ भाजक वजा होत नाहीं, असा जो भाज्याचा अंश राहातो, त्यास बाकी ह्मणावें.

रीति.

प्रथम भाज्य मांडून त्याचा डावेकडे) असें चिन्ह करून, भाजक मांडावा; नंतर भाज्यांतील पहिला अंक जर भाजकांतील पहिले अंकापेक्षां लहान आहे, तर भाजकांत जितकीं अंकस्थळें आहेत, त्यांपेक्षां भाज्यांत एक अंकस्थळ अधिक ठेवून, तेथें खूण करावी. आणि जर तो मोठा आहे, तर अंकस्थळ बरोबरच ठेवावीं; आणि भाजकांतील पहिला अंक भाज्यांतील पहिले अंकाचा मोठेपणामुळें किंवा लहानपणामुळें एक अथवा दोन अंक घेऊन, त्यांतून किती वेळ जातो तें पहावें;+ आणि तो वेळांक भागाकार स्थळीं ह्मणजे भाज्याचा उजवेकडे (असें चिन्ह करून त्यांत मांडावा; नंतर त्या अंकानें भाजकांतील सर्व अंक गुणून, तो गु-

---

+ कदाचित् भाज्यांतील दोन अंक भाजकांतील दोन अंकां बरोबर असून तिसरा अंक जर लहान असेल तरी ही एक स्थळ भाज्यांत जास्त घ्यावें, याप्रमाणेंच तीन चार इ॰ अंक बरोबर असून पुढील अंक लहान असल्यास करावें.

आणि बाकीवर भाज्यांतून वरचा एक अंक घ्यावा तो नवा भाज्य होईल, कदाचित् हा भाज्य भाजकापेक्षां कमी झाल्यास भाग शून्याचा लावून त्याजवर भाज्यांतील वरचा एक अंक घ्यावा. तो नवा भाज्य असें समजून त्यास भाजकानें भागून भागाकार पूर्व भागाकारा वर मांडावा. अशी कृति भाज्यांतील सर्व अंक संपत पर्यंत करावी. दर वेळेस जी बाकी राहात्ये ती भाजकापेक्षां कमी राहिली पाहिजे. शेवटीं जी बाकी राहील ती भागाकारापुढें मांडून त्याखालीं रेघ काढावी. आणि खालीं भाजक मांडावा.

कोणत्या ही रकमेनें शून्य भागिलें असतां भागाकार शून्य. कारण कोणती ही रकम शून्यांतून वजा होत नाहीं.

कोणत्या ही रकमेला शून्यानें भागिलें असतां भागाकार अनंत.+

शून्याला शून्यानें भागिलें असतां भागाकार शून्य. अथवा कांहीं तरी सांत पद⁑ आहे.

+ अ कोणती ही संख्या आणि ब, क, ड, ई, फ इत्यादि संख्या अनुक्रमें अचे बराबर, अर्धी, चवथाई, आठवा हिसा इ॰ असतील तर त्यांचे अनुक्रमें भागाकार ब) अ (१, क) अ (२, ४, ८, १६, इत्यादि. यावरून पहातां, भाज्य एक असून भाजक जसजसा लहान होईल, त्या प्रमाणें भागाकार मोठा होतो ह्मणून भाजक फारच लहान झाल्यास भागाकार फारच मोठा होतो तसें भाजक (०) ह्मणजे अनंत लहान तेव्हां भागाकार अनंत मोठा हें सिद्ध.

⁑ अ कोणती ही संख्या असेल तर (०) आणि अ यांचा गुणाकार (०) वरील नियमा प्रमाणें आतां गुणाकाराला गुण्यानें भागिलें असतां गुणक होतो, याजकरितां गुणाकार शून्य यांस गुण्य (०) यानें भागिले असतां भागाकार गुणक ह्मणजे एथें (अ) आहे तेव्हां शून्याला शून्यानें भागिलें असतां भागाकार (०) अथवा कांहीं तरी सांत पद येतो हें सिद्ध

उदाहरण.

३४६२५०२ हे भाज्य यांस ५१८ या भाजकानें भाग.

```
भाजक.   भाज्य          भागाकार.
५१८ )  ३४६२५०२  ( ६६८४ १९०/५१८
        ३१०८
        ·३५४५
         ३१०८
         ·४३७०
          ४१४४
          ·२२६२
           २०७२
           ·१९० बाकी.
```

ताळा.

प्रथम रीति– भागाकारानें भाजक गुणून त्यांत भागाकाराची बाकी असल्यास मिळवावी. ती बेरीज भाज्याचे बराबर आली तर भागाकार खरा.

दुसरी रीति– जसें प्रथम रीतींत अंकाला गुणिलें व मिळविलें, त्याप्रमाणें त्या रकमांतील अंकांचे बेरजेंतून नऊनऊ टाकून गुणावें व मिळवावें; आणि त्यांतील अंकांचे बेरजेंतून नऊनऊ टाकून उरलेला अंक व भाज्यांतील अंकांचे बेरजेंतून नऊनऊ टाकून उरलेला अंक हे जर बराबर येतील तर भागाकार खरा.

उदाहरणें.

(१) ३५८ हे भाज्य यांस १२ या भाजकानें भाग.

```
१२) ३५८ (२९ १०/१२        २९
                        १२
                        ३४८
                         १०
                        ३५८
```

(२) ४८५२६ हे भाज्य यांस २३५ या भाजकानें भाग.

```
२३५) ४८५२६ (२०६ ११६/२३५ भागाकार.
     ४७०
     ·१५२६
      १४१०
      ·११६ बाकी.
```

```
 ८  ७  ८
 १  ७  ८
```

प्रथमरीति. भाजक वीस अंका पावतों असला, तर पूर्वीप्रमाणें लांब तपशील न करितां वर सांगितल्या प्रमाणें भाज्य भाजक मांडून, भाज्या चे खालीं रेघ काढावी; नंतर पूर्वी सांगितल्या प्रमाणें भाजकआाई असा भाज्यांक मनांत घेऊन, गुणाकार आणि वजा बाकी मनांतच करून रे घे खालीं भागाकार लिहावा. आणि बाकीवर वरचा एक अंक मनांतच घेऊन वर प्रमाणें करावें.

उदाहरणें.

(१)

१३) ४५७४१२
३५१८५ ८/१३

(२)

१८) ९३६२८४
५२०१५ १४/१८

दुसरीरीति. जेव्हां भाजक दोन किंवा अधिक संख्यांचा गुणाकार आहे. तेव्हां भाज्यास त्यांतील एका अवयवानें भागून, त्या भागाकारा स दुसरे अवयवानें भागावें. या प्रमाणें जितके अवयव असतील, तितक्यांनीं भागावें, शेवटील भागाकार येईल तो इच्छिलेला भागा कार होईल.

टीप. सगळ्या भाजकानें भागून जी बाकी राहात्ये; ती ह्या वेगळाल्या बाक्यांपासून काढायाची रीति अशी आहे कीं, शेवटील बाकी उपांत्य+ भाजकानें गुणावी, आणि त्या गुणाकारांत त्याचा वरची बाकी मि ळवावी. या प्रमाणें सर्व भाजक आणि बाक्या यांणीं समग्र बाकी का ढावी.

उदाहरणें

+उपांत्य भाजक ह्मणजे शेवटील भाजकाचा पूर्वीचा भाजक.

(१) ७११४६९२ यांस १६८ यांणीं अ॰ त्याचे गुण्य गुणकरूप अवर ३,७,८ यांणीं भाग.

```
३) ७११४६९२ (०
७) २३७१५६४ (६
८)  ३३८७९४ (२
     ४२३४९   ६०/१६८
```

२ शेवटील बाकी.
७ उपांत्य भाजक.
१४
६ दुसरी बाकी.
२०
३ वरील भाजक.
६०
० वरील बाकी.
६० समग्र बा.

(२) १५३७८०५ यांस ५१२ यांनीं भाग.

उत्तर. ३००३ २६९/५१२

तिसरी रीति. जेव्हां भाजकाचे उजवेकडे कांहीं शून्यें असतील, तेव्हां तीं कापून नाहींत असें मनांत आणावें. शून्यें जितकीं असतील, तितके उजवे शेवटाकडील भाज्यांक कापून ते नाहींत असें मनांत आणावें, नंतर त्या शून्यरहित भाजकानें तो भाज्य कापल्यापर्यंत भागावा. भागाकार होऊन बाकी राहील, तिजवर ते कापलेले भाज्यांक मांडावे आणि त्याचे खालीं भाजक मांडून त्यावर तीं कापलेलीं शून्यें मांडावीं.

उदाहरणें.

(१) ६४१२८१७ यांस ४३०० यांनीं भाग.

```
४३|००) ६४१२८|१७ (१४९१ २५१७/४३००
       ४३
       २११
       १७२
        ३९२
        ३८७
          ६८
          ४३
          २५१७ बाकी.
```

उत्तर. ११६८ $\frac{२९९२}{३०००}$

चवथीरीति- गुणाकार वेगळाले उत्पन्न होतात, ते न लिहितां बाक्यामात्र लिहाव्या. ह्मणजे पूर्वी प्रमाणें भाजकास भागाकार अंकानें गुणावें. आणि त्या गुणाकाराचे वेगळाले अंक जसजसे उत्पन्न होतात, तसतसे ते लागलेच वरचे भाज्यांकांतून वजा करून बाकी खालीं लिहावी; परंतु हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे कीं, जे हातचे दशक घेतले असतील, ते पुढील अंकांचे गुणाकारांत मिळवावे.

उदाहरणें.

(१) १३१८८२४ यांस १८५ यांणीं भाग.

```
१८५) १३१८८२४ (७१२८ १४४/१८५ भागाकार.
      ----
       २३८
       ----
        ५३२
        ----
        १६२४
        ----
         १४४ बाकी.
```

(२) ६५३२६ यांस ३६५ यांणीं भाग.

उत्तर. १७८ $\frac{३५६}{३६५}$

भांजणी.

भांजणी ह्मणजे संख्येची किंमत तशीच ठेऊन नाम आणि रूप पालटण्याचा प्रकार.

ही भांजणी प्रायशः पैका, तोल, माप, देश, कालादि मान यांचे का-

भाग घेतात. हिचे दोन प्रकार आहेत. चढती भांजणी आणि उतरती भांजणी.

जेव्हां भारी नामाची संख्या हलक्या नामांत आणायाची आहे; तेव्हां तीस उतरती भांजणी ह्मणतात, तसेंच हलक्या नामाची संख्या भारी नामांत आणायाची आहे, तेव्हां तीस चढणी भांजणी ह्मणतात.

भांजणीची रीति सांगण्या पूर्वी पैका, तोल, माप, देश, आणि काल मान यांचे मानाचे कोष्टक, सांगतों. हें तोंडपाठ करावें.

पैक्याचे कोष्टक.

दक्षिण पैक्याचा कोष्टक.

४ कवड्या,+	ह्मणजे	१ गंडा.
२ गंडे,	———	१ टोली.
२ टोल्या,	———	१ दमडी.
४ दमड्या,	———	१ पैसा.
४ पैसे,+	———	१ आणा.
४ आणा,	———	१ पावला
४ पावले,	———	१ रुपया.
४½ रुपये,	———	१ होन.
५ रुपये,	———	१ पुतळी.
२ पुतळ्या,	———	१ मोहोर.

विलायती पैक्याचा कोष्टक.

२ फार्दिंग,	ह्मणजे	१ हाफपेनी.
४ फार्दिंग,	———	१ पेनी.
१२ पेन्स,*	———	१ शिलिंग.
२० शिलिंग,	———	१ पौंड.
५ शिलिंग,	———	१ क्रौन.
२१ शिलिंग,	———	१ गिनी.
२७ शिलिंग,	———	१ मायडर.×
४ पेन्स,	———	१ ग्रोट.

+ कवड्या आणि पैसे कधीं कधीं बाजार भावामुळें उणे अधिक होतात.

* पेन्स हे पेनी शब्दाचें बहुवचन.

× पोर्तुगीस नाणें आहे.

१२पै,	ह्मणजे	१ आणा.
१६आणे,	——	१ रुपया.

२० विसे किंवा २½ दाम	——	१ रुका, पै.

सरकारी रीतीचा दुसरा कोष्ठक.

२५रेस,	ह्मणजे	१ आणा.
४आणे,	——	१ पावला.
४पावले,	——	१ रुपया.

इंग्रेजी आणि मराठी या दोन पैक्याचे बरोबरीचा कोष्ठक.

१० रुपये,	ह्मणजे	१ पौंड.
१ अर्धरुपया,	——	१ शिलिंग.
८पै,	——	१ पेनी.

इंग्रेजी सोनें रुपें तोलायाचा मापयाचा कोष्ठक.

२४ ग्रेन,	ह्मणजे	१ पेनिवेट.
२० पेनिवेट,	——	१ औंस.
१२ औंस,	——	१ पौंड.

सोने, रुपें इत्यादि तोलायाचे कोष्ठक.

पुणेंचाली प्रमाणें.

४ उडिद,	ह्मणजे	१ गुंज.
८ गुंजा,	——	१ मासा.
१२ मासे,	——	१ तोळा.
२४ तोळे,	——	१ शेर

मुंबईचाली प्रमाणें.

२½ वाल,	ह्मणजे	१ मासा.
४० वाल किंवा १२ मासे.	——	१ तोळा.

व्यापारांतील साकर, तेल, तूप इत्यादि तोलायाचें कोष्टक.

पुणें चाली प्रमाणें.

८ गुंजा,	ह्मणजे	१ मासा.
१२ मासे,	———	१ तोळा, टांक.
७२ टांक,	———	१ पक्का शेर.
४० शेर,	———	१ मण.
२½ मण,	———	१ पल्ला.
८ पल्ले किं० २० मण		१ खंडी.

मुंबई चाली प्रमाणें.

८ गुंजा,	ह्मणजे	१ मासा.
१२ मासे,	———	१ तोळा.
२८ तोळे,	———	१ शेर.
४० शेर,	———	१ मण.
२० मण,	———	१ खंडी.
१ टांक	———	२·४५८ ड्राम.

दक्षिण महाराष्ट्र देशांतील तेल, तूप, तोलायाचा कोष्टक.

२४ तोळे,	ह्मणजे	१ कच्चा शेर.
५ कच्चे शेर,	———	१ पासरी.
२ पासऱ्या,	———	१ धडा.
४ धडे,	———	१ मण.
२० मण,	———	१ खंडी.

इंग्रेजी वैद्याचा कोष्टक.

२० ग्रेन	ह्मणजे	१ स्क्रूपू.
३ स्क्रूपू,	———	१ ड्राम.
८ ड्राम,	———	१ औंस.
१२ औंस,	———	१ पौंड.

मोती तोलायाचें कोष्टक.

पुणें चालीचा.

१६ तंदुल,	ह्मणजे	१ रती.
२४ रती,	———	१ टांक.

मुंबई चालीचा.

१२¾ टके,	ह्मणजे	१ रती.
२४ रती,	———	१ टांक.

मराठीरीतीप्रमाणें.			इंग्रेजीरीतीप्रमाणें.		
८ यव,	म्हणजे	१ अंगूळ.	३ उभेयव,	म्हणजे	१ इंच.
२४ अंगुळें,	———	१ हात.	१२ इंच,	———	१ फुट.
४ हात,	———	१ दंड.	३ फुटी,	———	१ यार्ड
२००० दंड,	———	१ कोस.	५$\frac{1}{2}$ यार्ड,	———	१ पोल.+
२ कोस,	———	१ गव्युति.	४० पोल,	———	१ फर्लांग.
२ गव्युति,		१ योजन.	८ फर्लांग,		१ मैल.

चौरसजमीनमोजणीचे कोष्टक.

मराठीरीतीप्रमाणें.			इंग्रेजीरीतीप्रमाणें.		
८ यव	म्हणजे	१ अंगूळ.	१४४ चौरस इंच.	म्ह०	१ चौरसफूट.
४ अंगुळें,	———	१ मुष्टि.	९ चौरसफुटी.	———	१ चौ० यार्ड.
३ मुष्टि,	———	१ वीत.	३०$\frac{1}{4}$ चौ० या०,	———	१ चौ० पोल.
२ विती,	———	१ हात.	४० चौ० पोल,	———	१ रूड.
५$\frac{5}{6}$ हात अ० ३५ मुष्टि.	———	१ काठी.	४ रूड.	———	१ एकर.
२० काठ्या.	———	१ पांड.	तोच सांप्रत पैमाषचालीचा.		
२० पांड.	———	१ बिघा.	१६ आणे,*	म्हणजे	१ गुंठा.
१२० बिघे,	———	१ चाहूर.	४० गुंठे	———	१ एकर.

घनमोजणीचे कोष्टक.

+पोल म्हणजे महाराष्ट्रदेशाची काठी. * एक आणा म्हणजे ७$\frac{1}{2}$ यार्डांअधिक आहे.

मराठीरीतीप्रमाणें.		
५१२ घनयव,	ह्मणजे	१ घ० अंगुळें
६४ घ० अंगु०,	——	१ घ० मु०
२७ घ० मुष्टि,	——	१ घ० वी०
८ घ० विती,	——	१ घ० हात.

इंग्रेजीरीतीप्रमाणें.		
१७२८ घनइंच,	ह्म०	१ घ० फूट.
२७ घनफुटी,	——	१ घ० यार्ड
१६६ ३/४ घनयार्ड,	——	१ शाद किंवा घन काठी.

धान्यादि मोजायाचे मापाचें कोष्टक.

पुणें चालीचा		
४ पाव,	ह्मणजे	१ शेर.
२ शेर,	——	१ अधोली.
२ अधोल्या,	——	१ पायली.
+१२ पायल्या,	——	१ मण.
२ १/२ मण,	——	१ पल्ला.
८ पल्ले किंवा २० मण	——	१ खंडी

मुंबई चालीचा.		
२ टिपऱ्या,	ह्मणजे	१ शेर.
२ शेर,	——	१ अधोली.
२ अधोल्या,	——	१ पायली.
⁜१६ पायल्या,	——	१ फरा किंवा मण.
२० मण,	——	१ खंडी.

तांबे, कथील इत्यादि तोलायाचा कोष्टक.

८ गुंजा,	ह्मणजे	१ मासा.
१२ मासे,	——	१ टांक.
७२ टांक,	——	१ पक्का शेर
१६ शेर,	——	१ मण.

+ हें बारुळें माप. ⁜ हें सोळुळें माप.

इंग्लंडातील मापाचें कोष्टक.

धान्यादि मोजायाचा.			पातळ पदार्थ मोजण्याचा.		
२ पैंट,	ह्मणजे	१ कार्ट.	२ पैंट,	ह्मणजे	१ कार्ट.
२ कार्ट,	———	१ पटल.	४ कार्ट,	———	१ ग्यालन.
२ पटल,	———	१ ग्यालन.	४२ ग्यालन,	———	१ तीर्स.
२ ग्यालन,	———	१ पेक.	१½ तीर्स,	———	१ हाग्झेट.
४ पेक,	———	१ बुशल.	२ हाग्झेट,	———	१ पैप. बट,
८ बुशल,	———	१ काटर.	२ पैप.	———	१ टन.
५ काटर,	———	१ वे.टन.			
२ वे.टन,	———	१ लास्त.			

वस्त्र, काष्ट मोजणीचें कोष्टक.

मराठी रीती प्रमाणें,			इंग्रेजी रीती प्रमाणें.		
२ अंगुळे,	ह्मणजे	१ तसू.	२¼ इंच,	———	१ नेल
१२ तसू,	———	१ हात.	४ नेल,	———	१ पावयार्ड
२ हात,	———	१ गज.	४ पावयार्ड,	———	१ यार्ड.

आवार्डुपाईसचा कोष्टक.			वर्तुळ परिघाचे मापाचा कोष्टक.		
१६ द्राम.	ह्मणजे	१ औंस.	६० विकळा,	ह्मणजे	१ कळा.
१६ औंस.	———	१ पौंड.	६० कळा,	———	१ अंश.
२८ पौंड,	———	१ कार्टर.	३६० अंश,	———	१ परीघ.
४ कार्टर,	———	१ हन्द्रवेट.	**मुंबईतील मीठ मोजायाचे मापाचा को०**		
२० हन्द्रवेट,	———	१ टन.	१०½ अधोल्या,	———	१ फरा.
या वजनानें जड पदार्थ तोलतात.			१०० फरे,	———	१ आणा.
			१६ आणे,	———	१ रास.

मराठी कालमानाचा कोष्टक.

६० पळें,	ह्मणजे	१ घटिका.
२ घटिका,	——	१ मुहूर्त.
३¾ मुहूर्त,	——	१ प्रहर.
८ प्रहर,	——	१ अहोरात्र, दिवस.
१५ दिवस,	——	१ पक्ष.
२ पक्ष,	——	१ मास.
२ मास,	——	१ ऋतु.
३ ऋतु,	——	१ अयन.
२ अयनें,	——	१ वर्ष.

मराठी आणि इंग्रेजी यादोन कालमानाचे बरोबराचा को॰

२४ सेकंद,	ह्मणजे	१ पळ.
२½ पळें,	——	१ मिनूट.
२४ मिनुटें,	——	१ घटिका.
२½ घटिका,	——	१ अवर.
३ अवर,	——	१ प्रहर.

इंग्रेजी कालमानाचा कोष्टक.

६० सेकंद,	ह्मणजे	१ मिन्युट.
६० मिन्युटें,	——	१ अवर.
२४ अवर,	——	१ दिवस.
७ दिवस,	——	१ उइक, आठवडा.
४ आठवडे,	——	१ मास.
१२ मास, १ दिवस, ६ अवर	——	१ वर्ष.

इंग्रेजी महिने व त्यांचे दिवस यांचा को॰

१ जान्युआरी, चे	३१ दिवस.
२ फेब्रुआरी,	+२८ दि॰
३ मार्च,	३१ दि॰
४ एप्रिल,	३० दि॰
५ मे,	३१ दि॰
६ जून,	३० दि॰
७ जुलै,	३१ दि॰
८ आगस्त,	३१ दि॰
९ सेप्तेंबर,	३० दि॰
१० आकटोबर,	३१ दि॰
११ नोवेंबर,	३० दि॰

+ प्रतिचवथे वर्षी या महिन्याचे २९ दिवस होतात.

उतरतीभांजणी.

रीति.

भारी नावाचे संख्येंतील एकांत तिच्या जवळच्या हलके नावाचे अवय व जितके आहेत, तितक्या अंकांनी ती पूर्व संख्या गुणावी; आणितींत त्या नावाचे हलके अंक असतील, ते मिळवावे, नंतर त्या नावाचे एकांत त्याचे जवळचे हलके अवयव किती असतील, त्यांणी ती बेरीज गुणून त्यांत त्या नावाचे अंक असतील, ते मिळवावे. या प्रमाणें शेवटपर्यंत करावें.

उदाहरणें.

(१) २१५ रुपये ३ आणे ९ पैयांच्या पै किती होतील?

रु॰ आ॰ पै.
२१५ .. ३ .. ९
१६
३४४३ आणे.
१२
४१३२५ पै. हे उत्तर.

(२) ५ वर्षे २ मास ४ दिवस. ९ अवर याचे अवर किती होतील?

(४) २५ बिघे ५ पांड ७ काठ्या ३ हात १ बीत २ मुष्टि ३ अंगुळें ४ यव यांचे यव किती होतील?

बि. पां. का. हा. बि. मु. अ. य.
२५ .. ५ .. ७ .. ३ .. १ .. २ .. ३ .. ४
२०　　　　　　　$\frac{३}{५}$
५०५ पांड.
२०
१०१०७ काठ्या.
२५
६)२५२७४५(२ मु
५८९५७
३
५८९६० हात.
३
११७९२१ बीत.

५..२..०..४..९
१२ ५..३०
६७ मास. ९..३९
४
२६८
७
१८७५ दिवस.
२४
४५२७९ अवरहेंउत्तर.

(३) १४मे २ यार्ड याचे इंच किती?

उत्तर, ८८७११२ इंच.

८
१४१५०७५ अंगुळें.
८
११३२०६०४ यवहेंउत्तर.

(५) १६यार्ड १ इंच कापडाचे इंच किती?

उत्तर, ५७७ इंच.

चढती भांजणी

रीति.

हलक्या नावाचे संख्येचे त्याचा जवळचे वरचा भारी नावाचे संख्येंतील एकांत हे हलके अंक किती आहेत, त्याणीं ती हलकी संख्या भागावी. बाकी राहील ती बाजूस मांडावी. या प्रमाणें शेवटील भारी अंकापर्यंत करावें.

उदाहरणें.

(१) ४५९३४५६ इतक्या गुंजा आहेत; यांचा खंडी किती?

```
 ८) ४५९३४५६
१२) .५७४१८२ मासे.
२४) ..४७८४८ तोळे. ६मा.
४०) ...१९९३ शेर. १६तो.
२०) .....४९ मण. ३३शेर.
    ......२ खंडी. ९म.
```

(२) ९४१३८७२ इतके चौरस इंच आहेत; यांचे एकर किती?

```
१४४) ९४१३८७२
  ९) ..६५३७४ फु० १६इं०
     ...७२६३ या० ७फु०
           ४
१२१) ..२९०५२ पावया.
 ४०) ....२४० पो० १२पा० या.
  ४) ........६ रू०
     ........१ ए० २ रू०
```

उत्तर २..९..३३ १५..६..०

उत्तर. १..२..०..२..७..१५

(३) ९० ९२३२५ हे यव आहेत यांचे मेल किती?

मे. फ. पो. या. फु. इं. य.
उत्तर, ४७..६..२६..५..०..१..१

(४) ४६१८ पेट यांचे टन किती?

ट. पे. हा. ती. ग्या. का. पेट.
उत्तर, २..०..०..१..३१..१..०

विविध मिळवणी.

विविध मिळवणी ह्मणजे एका जातींत विविध नामांच्या अनेक रकमांची बेरीज करणें

रीति.

रकमा मांडण्याची व बेरीज करण्याची रीति साध्या मिळवणी प्रमाणेंच आहे, ह्मणजे ज्या नावाचा जो अंक तो त्या नावा खालीं लिहावा; परंतु प्रत्येक नावाचें स्थान निरनिराळें करावें.

रकमांचे शेवटील हलके नावाचे अंकांची बेरीज घ्यावी, नंतर त्या बेरजेस त्याचे वरील भारी नावाचे एकांत हे अंक किती आहेत त्यांणीं भागून भागाकार येईल तो हातचा ठेवून बाकी त्या हलके नामा खाली मांडावी नंतर तो हातचा अंक त्याचे जवळचे भारी नावाचे अंकांत मिळवून पूर्ववत् करावें.

उदाहरणें.

(१) २४१२, ६१२ आणि ९४२८ यांची बेरीज कर.

(२) २२ गज १ हात २ तसू व १५ गज ६ तसू यांची बेरीज कर.

सह॰ शतं दहं एकं.
३ .. ४ .. १ .. २
६ .. १ .. २
९ .. ४ .. २ .. ८
१२ .. ४ .. ५ .. २ हें उत्तर.

गं॰ हा॰ तं॰
२२ .. १ .. ९
१२ .. ० .. ६
३५ .. ० .. ३ हें उत्तर.

(३)

खं. म. शे. तो. मा. गुं.
५ .. १७ .. २३ .. ३ .. ५ .. २
१ .. ० .. २१ .. २५ .. ७ .. ५
५ .. ८ .. २७ .. ३ .. ० .. ७
१२ .. १२ .. २४ .. १५ .. ३ .. ०
२५ .. ० .. १६ .. १९ .. ४ .. ६ उत्तरें

(४)

पौं॰ शि॰ पे॰ फा॰
९ .. १२ .. १० .. २
१ .. ० .. ५ .. १
१८ .. ७ .. ९ .. ०
२५ .. १८ .. १० .. ३
५५ .. ० .. ११ .. २

विविध मिळवणीचा ताळा साध्या मिळवणीचा ताळ्याचा पहिल्याव दुसऱ्या रीतींत सांगितल्या प्रमाणें.

विविधवजाबाकी.

विविधवजाबाकी ह्मणजे, एकाजातींत विविधनामाचा एका रकमेंतून दुसरी रकम काढणें.

रीति.

विविध मिळवणींत सांगितल्या प्रमाणें, रकमा मांडाव्या. त्यांत मोठी रकम वर मांडून लहान खालीं मांडावी आणि त्या खालीं रेघ काढावी. नंतर खालचे रकमेचे उजवे कडचा शेवटील अंका पासून आरंभकरा

वा. तो अंक त्याचे वरचे अंकांतून बाद करून, बाकी खालीं मांडावी. जर मोठ्या रकमेंतील एकाद्यानामाचा अंक खालचे अंकापेक्षां लहान असेल, तर त्याचा जवळचा मोठ्या नामापासून एक अंक हातचा घेऊन उतरत्या भांजणीचे रीतीनें त्या अंकाचे खालचे जातीचे हलके अंक करून त्यांत त्याजातीचा वरील अंक मिळवून, मग वजा बाकी करावी. तो घेतलेला हातचा अंक त्याचे जवळचे वजा करावयाचे भारी अंकांत मिळवून वजा करावा.

उदाहरणें.

(१)

यो.	ग.	को.	दं.	हा.	अं.	य.
५	०	१	५२	२	२	५
१	१	१	७८	३	५	२
३	०	१	१९३	३	२१	२

उत्तरें.

(२)

ट.	पैप.	हा.	ती.	ग्या.	का.	पै.
१४	१	०	१	३१	२	१
८	१	१	१	२८	३	०
५	१	१	०	३	०	१

(३) कोणीं एक मनुष्य ज्येष्ठ शुद्ध २ शाके १७५२ रोजीं जन्मला. आणि कार्तिक शु. ९ शाके १७६९ रोजीं त्याचें लग्न झालें. पुढें श्रावण कृ. ५ शाके १७७८ रोजीं त्यास पुत्र झाला. तेव्हां त्या दिवशीं त्याचे वयास कितीवर्षे व लग्न झाल्यास किती वर्षे झालीं?

	व.	म.	दि.
	१७७७	४	५
	१७५१	२	३
वयास	२६	२	२

उत्तरें

व.	म.	दि.	
१७७७	४	५	
१७६८	७	९	
८	८	२६	लग्नास.

विविध वजाबाकीचा ताळा साध्या वजाबाकीचे पहिले रीतीप्रमाणें.

विविधगुणाकार.

विविधगुणाकार ह्मणजे अनेक नामाच्या अंकांची रकम अनेक वेळां आली तिची बेरीज घेणें.

रीति.

गुण्य रकमेचा शेवटील हलक्या नावाच्या अंका खालीं गुणक मांडून त्याचे खालीं रेघ काढावी, नंतर तो शेवटील अंक त्या गुणकानें गुणावा, नंतर त्या गुणाकारास त्याचे वरील भारी नावाचे एकांत हे अंक किती आहेत त्यांणीं भागून भागाकार येईल तो हातचा ठेवून बाकी त्या हलके नामाखालीं मांडावी. नंतर त्याचे जवळचा दुसरा अंक त्याच गुणकानें गुणून त्यांत हातचा मिळवून पुढे शेवटपर्यंत पूर्ववत् कृति करावी.

उदाहरणें.

जर कोणी मनुष्य दररोज १४ मैल ७ फर्लांग २ पोल ३ यार्ड २ फुटी इतका चालतो, तर १५ दिवसांत किती चालेल?

मै.	फ.	पो.	या.	फु.	
१४ ..	७ ..	२ ..	३ ..	२	गुण्य
				१५	गुणक
२२३ ..	२ ..	० ..	० ..	०	गुणाकार हें उत्तर.

गुणाकारसंक्षेप.

प्रथमरीति. जर गुणक विसांपेक्षां अधिक असेल, तर सगळ्या गुणकानें एकदम न गुणितां, तुकडी गुणाकाराचे प्रथम रीतींत सांगि

तल्या प्रमाणें त्याचे गुण्य गुणक अवयवांनीं गुणावें.

दुसरी- जर गुणक विसांपेक्षां अधिक असून त्याचे गुण्य गुणक अवयव बरोबर होत नसतील, तर तुकडी गुणाकाराचे दुसरे रीतींत सांगितल्या प्रमाणें गुणावें.

उदाहरणें.

(१) १२ वर्षे ५ मास २ आठवडे २ दिवस ४ अवर यांस २८ यांणीं अथवा त्याचे गुण्य गुणक रूप अवयव ७, ४ यांणीं गुण.

व॰ मा॰ आ॰ दि॰ अ॰
१२.. ५.. २.. २..४
७
८७..१..२..१..४
२..१८ वजा.
८७.. १.. २.. ४..१० बा.गु.
४
३४८.. ६.. २.. २..१६ स.गु.

(२) २ योजनें १ कोस १५५९ दंड २ हात २१ अंगुळें यांस पांचयांणीं गूण.

यो. ग॰ को॰ दं॰ हा॰ अं॰
उत्तर. १२..०..०..१७९८..२..९.

(३) १४ गज १ हात ५ तसू १ अंगूळ यांस २४ अथवा ८ वेळां ४ अधिक २ यांणीं गूण.

ग॰ हा॰ त॰ अं॰
१४.. १.. ५.. १
८
११७.. १..८..०
४
४७१.. ०..८.. ०
२९.. ०..११..० दोन वेळां गुण्य
५००.. १.. ७.. ० गुणाकार.

(४) २ राम ५ आणे २१ फरे ३ अधोली यांस ७ यांणीं गूण.

रा॰ आ॰ फ॰ अ॰
उत्तर. २२.. ४..४९..०

विविध भागाकार ह्मणजे विविधनामाचे संख्यांचे रकमेस कोणत्या ही सांगितले संख्येनें भागणें.

रीति

सरळ भागाकार रीती प्रमाणें भाजक भाज्याचे डावेकडे मांडून, नंतर डावे कडून आरंभ करावा, आणि भाज्यांतील अत्यंत भारी नामाचा अंक भाजकानें भागून, जो भागाकार येईल, तो त्याचे खाली मांडावा. बाकी राहिल्यास तीस उतरत्या मांजणीचे रीती प्रमाणें जवळचे हलक्या नावाचे अंकांत आणून, भाज्यांत या नावाची कांहीं संख्या असल्यास ती यांत मिळवून, ती बेरीज पूर्व भाजकानें भागावी; भागाकार येईल, तो त्याचे खाली मांडावा, आणि त्याची बाकी राहिली, तर तिचे जवळचे हलके नावाचे अंकांत तिला आणून, पूर्व रीतीनें करावें. या प्रमाणें पुढे ही करून, बाकी शेवटीं अति हलके संख्ये जवळ मांडावी.

याचा ताळा सरळ भागाकाराचे प्रथम रीती प्रमाणें.

उदाहरणें.

(१) ९ वर्षे १ अयन २ ऋतु १ मास १ पक्ष ८ दिवस ७ प्रहर २ मुहूर्त १ घटिका ५६ पळें हे भाज्य यांस ८ या भाजकानें भागा.

व० अ० ऋ० मा० प० दि० प्र० मु० घ० प०

८) ९..१..२..१..१..८..७..२..१..५६

उत्तर. १..०..१..०..१..१४..१..२..१..१८ २०/८

यांस ५ यांणीं भाग.

पौं॰ शि॰ पे॰
उत्तर ११..१७..२ $\frac{४}{५}$

स ४८ यांणीं भाग.

गु॰ आ॰
उत्तर १५..१० $\frac{१५}{४८}$

भागाकारसंक्षेप.

जर भाजक विसांपेक्षां अधिक असून त्याचे गुण्य गुणक अवयव बरोबर होत असतील, तर करून त्यांणीं तुकडी भाकाराचे रीतीप्रमाणें भागाकार करून बाकी काढावी.

उदाहरणें.

(१) १२१ खंडी १५ मण ९ पायल्या २ शेर २ पाव यांस ६३ यांणीं अथवा त्याचे गुण्य गुणक रूप अवयव ७, ९ यांणीं भाग.

खं॰ म॰ पा॰ शे॰ पा॰
७) १२१..१५..९..२..२
९) १७..७..१५..०..२ – ० बाकी
१..१८..१०..२..१ – १ बा.
१..१८..१०..२..१ $\frac{७}{६३}$ उत्तरें.

(२) १२ पौंड २ औंस १२ पेनिवेट २० ग्रेन यांस २४ यांणीं अथवा त्याचे गुण्य गुणक रूप अवयव ४, ६ यांणीं भाग.

पौं॰ औं॰ पे॰ ग्रे॰
४) १२..२..१२..२०
६) ३..२..१२..५
०..६..१२..४ – ५
०..६..१२..४ $\frac{२०}{२४}$

विविधजातीचा मराठी प्रकार.

हा पहातां भाजणी व अपूर्णांक यांचा भाग आहे, परंतु व्यवहारांत याचा खालीं लिहितों यारीतीनें उपयोग करितात; ह्मणून ती री

ति एथें लिहितों.

रेघांची मिळवणी.

ही मिळवणी सांगण्या पूर्वी विद्यार्थ्यास रुपये, पावले, आणे इत्यादि व खंडी, मण, पायल्या, इ॰ मांडितां याव्या ह्मणून एथें थोडीशी सूचना लिहितों. रुपयांचे अंकच लिहितात, पावल्याची ।. अशी रेघ लिहितात, व आणा ८ ÷ असा लिहितात. पाव आणा ॥. असा लिहितात. पाव आण्यावर पै असल्यास त्यांचा अंक लिहितात. हल्लीं सरकारामध्यें लिहिण्याचा सांप्रदाय निराळा आहे, तो असा. रुपयांचा अंक घालून त्यावर ८ अशी अळी आणि तिजवर आण्याचा अंक घालून पुनः अळी घालावी. तिजवर पैंचा अंक घालावा. खंडी, मण इत्यादि वेरजेच्या वेळेस उदाहरणांत मांडिलें आहे. त्याप्रमाणें मांडावें. यांत जीं पदें नसतील, त्यां बद्दल अंकासाठीं शून्य आणि रेघेसाठीं अळी बहुत करून मांडण्याचा सांप्रदाय आहे.

रीति.

वर सांगितल्या प्रमाणें रुपये, पावले, इत्यादि मांडणें झाल्यावर त्याखालीं, दुसऱ्या रकमा मांडून खालीं रेघ काढावी. नंतर शेवटील अति हलके नामाच्या सजातीय रेघा अथवा अंक यांची मिळवणी करावी नंतर त्या मिळवणीस त्याचे वरील भारी नावाचे एकांत हे किंवा त्या किती आहेत त्यांणीं भागून भागाकार येईल तो हातचा ठेवून, बाकी रेघेखालीं मांडावी. नंतर तो हातचा अंक त्याचे जवळच्या भारींत मिळवून पूर्ववत् करावें.

उदाहरणें.

रुपये	रुपये.	केलीबारोळें
(१) २५॥ऽ१	(२) २२९२८४	(३) २३॥।१॥ ५॥८
१७॥।ऽ२	१७९४८८	६७१॥।–
९॥१	९१०	६६५॥=
३॥०॥२	३६८८८	१॥०॥।०॥।–
१३६६२	१३६६२	६६६२
१२५ऽ०	१९२६७८९	१॥०॥।१६÷
२५॥=६२	२१२९१२८२	२७६३७।=

केलीसोकुलें.	विघावणी	वजन अड्डाविशी.
(४) ३०॥।३॥।–	(५) १५।२३।१॥१	(६) १७७।७।२
६५।१॥=	२५॥६७॥१	१२६५॥ ५।२
०॥।५१।=	९३॥७।४	०॥।०॥।७।४
७०॥।५॥=	३७।७९॥१	३०।३॥६४

सोनें रुपें	तांबें.	काळमान.
(७) १७।१॥०॥।०	(८) ९।३॥४	(९) १७६३६२९
६५।१॥।०	६२५।२	१३६०६२७
१८६९॥।०	७॥५॥११	१६२६८
३५॥१॥०।०	६७॥१।२	३२६४६९

रेघांचीवजाबाकी.

मिळवणी प्रमाणें दोन्ही रकमा मांडाव्या. त्यांत मोठी रकम वरमांडून लहान खालीं मांडावी, आणि खालीं रेघ काढावी; नंतर शेवटील अति हलक्या सजातीय रेघा अथवा अंक यांपासून वजाबाकीस प्रारंभ करावा. जर एकादे जातीचा रेघा किंवा अंक वरील रेघा किंवा अंक यांतून वजा होत नसतील तर विविध वजाबाकींत सांगितल्या प्रमाणें करून वजाबाकी करावी.

उदाहरणें.

रुपये.	रुपये.	कैलीबारोळें.
(१) २१७।५।२	(२) २१४ ७११८	(३) १६५१॥१॥-
१३१॥।=॥१	१३१ ७१३७१०	११७।-॥।५।=
८५॥।=॥१	·८२७१३७१०	·८१॥।-॥१॥=

कैलीसोळुळें	विघावणी.	वजनी.
(४) १७-॥।-॥।=	(५) ११२८७३।७।२	(६) १३६५।७।३
१०॥ १॥।३८=	१०७।२२८७३॥।१	११॥ ५॥७२
·३।३॥।१॥।	··५।१।-॥१	·१७।६८२

कालमान.	तोळेवार.	पक्केंवजन तांबें कथील इ०
(७) १२८६८९	(८) १५।१॥-॥।१	(९) १७५।३।११
१३८७११	११॥।५।१॥२	-॥।७।५१७
·१४९८२८	·३।१॥।१७	१३।३७१७२

रेघांचा गुणाकार.

गुण्य आणि गुणक रेघांसहित किंवा रेघांवांचून आहेत, याजवरू न त्याचे दोन प्रकार आहेत.

रेघांचे गुणाकारांत खालीं लिहिलेले नियम लक्षांत ठेविले पाहि जेत.

(१) कोणत्याही अंकानें रुपयांस गुणिलें असतां, गुणाकार रुपये. आण्यास गुणिलें असतां, आणे; खंडीस गुणिलें असतां, खंडी इत्या

+ रुपयांस रुपयांनीं अथवा खंडीस खंडीनीं गुण ह्मणणें हें केवळ अशक्य आहे, कारण गुणाकार ह्मणजे गुणक वेळां गुण्य मांडून त्यांची बेरीज करणें ते व्हां रुपयावेळां रुपया अथवा खंडीवेळां खंडी ह्मणजे अर्थ कांहीं नाहीं. व्यव हारांत रुपयांस रुपयांनीं गुण असा ह्मणण्याचा संप्रदाय आहे, त्याठिका णीं रुपयांस अमुक अंकानें गुण असें ह्मणावें. गुणकावर पावलें आण्याच्या रेघा असतील, त्या रुपयाचे पावले आणे नव्हत. वेळांकाचे पावले आणे आहे त. जसें रुपयाला अर्धरुपयानें गुण ह्मणणे ह्मणजे रुपया ह्या अर्धवेळां घेणें इ०

\# यावजनांत सोळा शेरांचा मण धरण्याची चाल आहे.

दि, यावरून जाजा जातीस गुणावें त्यात्या जातीचा गुणाकार येतो. (२) पावल्यांस पावल्यांनीं गुणिलें असतां, आणे, आण्यास आण्यांनीं गुणिलें असतां, पाऊण पै. पैशांस पैशांनीं गुणिलें असतां, पैशाचा ६४ वा हिसा. गुणाकार येतो. याची सत्यता अपूर्णांक शिकल्यावर लक्षांत येईल.

प्रथम प्रकार. जेव्हां गुण्यावर रेघा असून गुणकावर नाहींत तेव्हां.

रीति.

गुण्य आणि गुणक मांडून गुण्यांतील अति हलके किमतीचा रेघांस गुणकानें गुणून त्या गुणाकारास जाजातिचा रेघांस गुणिलें त्याचे वरचा भारी जातीचे एकांत या रेघा किती आहेत, त्यांणीं भागावें; भागाकार येईल, तो हातचा ठेवून, बाकी त्याखालीं मांडावी; नंतर गुणकानें त्याचे जवळचे भारी किमतीचा रेघांस गुणून; त्यांत तो हातचा मिळवून, पुन: वर सांगितल्या प्रमाणें हातचा घेऊन बाकी मांडावी. या प्रमाणें शेवट पर्यंत रेघांचे गुणणें झाल्यावर, साध्या गुणाकाराचे रीतीनें अंकास गुणून, त्यांत शेवटील हातचा असेल तो मिळवावा, अथवा अंकांनीं अंकास गुणून नंतर गुणकांकांनीं गुण्यांतील रेघांस गुणण्या बद्दल गुणकांकांचा निम्‍पटीवरचा हलक्या जातीच्या रेघां पर्यंत काढून बेरीज घ्यावी.

उदाहरणें.

(१) ३११ा।ऽ। गुण्य.
 ९४ गुणक.
 २९६७१।।= गुणाकार.

(२) १६३।ऽ। गुण्य.
 ७२ गुणक.
 ११८०९

तपशील

[illegible]

३६	अर्धरु०
+ ~~१८~~	~~पावली~~
९	चवल
७॥	आणा.
५	अर्धआणा.
११८५४॥	गुणाकार

दुसरा प्रकार. गुण्य आणि गुणक यादोहोंवर ही रेघा आहेत तेव्हां

रीति.

प्रथम गुण्यांतील अंकांस गुणकांतील अंकांनीं गुणावें, आणि गुणकावरील रेघांचा गुणाकारासाठीं गुण्यांतील रेघांस धों अंकांचा निमूपटी हलकें मान असेल, तेथपर्यंत काढाव्या. आणि गुण्यांतील रेघांचा गुणाकारासाठीं गुणकांतील केवळ अंकांचाच निमूपटी घ्याव्या. आणि या दोन निमूपटी व अंकांचा गुणाकार यांची बेरीज घ्यावी. ह्मणजे ती बेरीज गुणाकार होईल.

उदाहरण.

३७॥=	गुण्य.
२३।५॥.	गुणक.
७८२	
११॥	अ. रु०
~~५॥~~	~~पा.~~
५॥=	च.
१।=	आ.
~~१७॥~~	~~अ. रु.~~
८।५॥	पा.
७।८१॥	च.
~~१८५५~~	~~आ.~~
१८५१८=	अ.
८११॥।२५॥=	गुणा.

अथवा.

गुण्य आणि गुणक यांतील अंक गुणावे, नंतर गुण्यांतील आण्यांनीं गुणकांतील पूर्ण अंकांस व गुणकांतील आण्यांनीं गुण्यांतील पूर्ण अंकांस गुणून त्या दोन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी; नंतर गुण्यांतील आण्यांस गुणकांतील आण्यांनीं गुणून, त्या गुणाकारास १६ नीं भागून तो भा

* जो भाग न सेल त्या भागाचा निमूपटीची रकम मोडून टाकिली पाहिजे.

गाकार पूर्वबेरजेंत मिळवावा. जी बेरीज होईल, ते आणे; त्यांस १६नीं भागून भागाकार येईल तो अंकांचा गुणाकारांत मिळवावा, म्हणजे गुणाकार झाला.

गुणाकाराचा आणखी एक प्रकार आहे, तो खाली केलेलें उदाहरण पाहिल्यावर समजेल. यांत रेघांचे ठिकाणीं अंक मांडिले पाहिजेत.

उदाहरण.

(१) ५॥ ॥ हे गुण्य यांस ३॥ ॥ या गुणकानें गूण.

रु॰ पा॰ आ॰ पै॰

५‥२‥२‥२ गुण्य.

३‥२‥३‥२ गुणक.

१५‥९‥६‥९

१०‥६‥४‥६

१५‥९‥६‥९

१०‥६‥४‥६

१५‥१९‥२७‥३२‥१८‥१२‥६

२२‥०‥०‥१‥१‥२‥२ उत्तरें

रु॰, पा॰, आ॰, पा॰पै॰, पा॰पै॰ इ॰

अथवा.

रु॰ पा॰ आ॰ पै॰

गुण्य. ५‥२‥२‥२

गुणक. ३‥२‥३‥२

१०‥६‥४‥६

१५‥९‥६‥९

१०‥६‥४‥६

१५‥९‥६‥९

१५‥१९‥२७‥३२‥१८‥१२‥६

२२‥०‥०‥१‥१‥२‥२

रु॰, पा॰, आ॰, पै॰, पा॰पै॰, पा॰पा॰पै॰ इ॰

वर रेघांचे गुणाकार करण्याच्या रीति लिहिल्या, त्यांशिवाय आइतेगुणाकार कोष्ठकांतून घेण्याची इच्छा असल्यास गुण्य आणि गुणक २४॥।= पर्यंत कोणती ही संख्या असेल तर, पुढील कोष्ठकांपासून गुणाकार अति सत्वर घेतां येईल.

रीति.

प्रथम कोष्ठकांत गुण्यांक पहिल्या आडव्या ओळींत पाहून, गुणकाकडावे कडील प्रथम उभे ओळींत पहावा, आणि त्याचे समोर गुण्या का

न्चे खालीं जे अंक असतील ते घ्यावे. हा गुण्य आणि गुणक यांतील पूर्णांकांचा गुणाकार झाला.

गुण्य आणि गुणक यांत रेघा असल्यास दुसरे कोष्टकांत प्रथम ओळींत गुण्याचे पूर्णांक पाहून, गुणकांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळींत पाहावे; आणि त्या समोर पूर्णांकाचे खालीं जे रुपये, आणे असतील ते घ्यावे. तसें गुणकांतील पूर्णांक वरील प्रथम ओळींत पाहून, गुण्यांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळींत पहावे; आणि त्या समोर त्या पूर्णांका खालीं जे रुपये, आणे असतील ते घ्यावे आणि त्या दोहोंची बेरीज करावी. ही बेरीज गुण्य आणि गुणक यांतील रेघांनीं परस्परांस गुणिलेला गुणाकार आहे.

तिसरे कोष्टकांत गुण्यांतील रेघांक प्रथम वरचे आडवे ओळींत पाहून गुणकांतील रेघांक डावे कडील प्रथम उभे ओळींत पहावे; आणि त्याचे समोर आणे, पै असतील त्या घ्याव्या, नंतर या तीन कोष्टकांतील घेतलेले गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. ह्मणजे इच्छिलेला गुणाकार झाला.

चवथे कोष्टकांत एक आण्या पासून चौवीस रुपये पंधरा आणे पर्यंत संख्यांचे वर्ग+ आहेत ते घेण्याची रीति.- अंकावर आरेघा असतील त्याचे अंक वरील प्रथम ओळींत पहावे आणि रेघांचे मागील अंक दुसरे उभे ओळींत पाहून त्या समोर रेघांका खालीं जे रुपये, आणे आहेत, ते घेऊन त्यांत त्या अंकाचा वर्ग प्रथम उभे ओळींत त्याला अंकासमोर आहे तो घेऊन मिळवावा. ह्मणजे इच्छिलेला वर्ग झाला.

उदाहरणें.

(१) १७॥= हे गुण्य यांस १७= या गुणकानें गूण.

+ कोणत्याही संख्येस त्याच संख्येनें गुणिलें असतां त्या गुणाकारास वर्ग ह्मणावे.

१७ आणि १४ यांचा गुणा० म० कोष्टकापासून ·· २३८

१७ आणि ।= यांचा गु० दुसरे कोष्टकापासून ·· ५=

१४ आणि ।= यांचा गु० दुसरे कोष्टकापासून ··· ५।=

।= आणि ।= यांचा गु० तिसरे कोष्टकापासून· ·।०॥

२४८।०॥ हें उत्तर·

(२) २०॥= यांस २०॥= यांणीं गूण·

चवथ्या कोष्टकापासून·

{ ४००
{ २७॥।
४२७॥।

(३) ४५३८॥= हे गुण्य यास २५।=, ३८५ , ७६।= या गुणकांनीं गूण·

(४) ७८६५४॥= हे गुण्य यांस ५०॥=, ६०॥=, ७५।, ५१।, ९८७।= या गुणकानीं गूण·

(५) ९८७६५४७॥ हे गुण्य यांस ७४।-, ५३०।=, ८९७१८०, ५००७०० यांणीं गूण·

(६) कोणीं एका मनुष्याचे कुटुंबास ५८ मनुष्यें ४६ गाई त्यांत दरमनुष्यास दररोज ०= व प्रति गाईस दररोज ०= तेव्हां त्यास एकंदर एक वर्षास खर्च किती लागेल.

गुणक	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५
१	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५
२	२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४	२६	२८	३०	३२	३४	३६	३८	४०	४२	४४	४६	४८	५०
३	३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६	३९	४२	४५	४८	५१	५४	५७	६०	६३	६६	६९	७२	७५
४	४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८	५२	५६	६०	६४	६८	७२	७६	८०	८४	८८	९२	९६	१००
५	५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०	६५	७०	७५	८०	८५	९०	९५	१००	१०५	११०	११५	१२०	१२५
६	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२	७८	८४	९०	९६	१०२	१०८	११४	१२०	१२६	१३२	१३८	१४४	१५०
७	७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४	९१	९८	१०५	११२	११९	१२६	१३३	१४०	१४७	१५४	१६१	१६८	१७५
८	८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६	१०४	११२	१२०	१२८	१३६	१४४	१५२	१६०	१६८	१७६	१८४	१९२	२००
९	९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८	११७	१२६	१३५	१४४	१५३	१६२	१७१	१८०	१८९	१९८	२०७	२१६	२२५
१०	१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०	१३०	१४०	१५०	१६०	१७०	१८०	१९०	२००	२१०	२२०	२३०	२४०	२५०
११	११	२२	३३	४४	५५	६६	७७	८८	९९	११०	१२१	१३२	१४३	१५४	१६५	१७६	१८७	१९८	२०९	२२०	२३१	२४२	२५३	२६४	२७५
१२	१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८	१२०	१३२	१४४	१५६	१६८	१८०	१९२	२०४	२१६	२२८	२४०	२५२	२६४	२७६	२८८	३००
१३	१३	२६	३९	५२	६५	७८	९१	१०४	११७	१३०	१४३	१५६	१६९	१८२	१९५	२०८	२२१	२३४	२४७	२६०	२७३	२८६	२९९	३१२	३२५
१४	१४	२८	४२	५६	७०	८४	९८	११२	१२६	१४०	१५४	१६८	१८२	१९६	२१०	२२४	२३८	२५२	२६६	२८०	२९४	३०८	३२२	३३६	३५०
१५	१५	३०	४५	६०	७५	९०	१०५	१२०	१३५	१५०	१६५	१८०	१९५	२१०	२२५	२४०	२५५	२७०	२८५	३००	३१५	३३०	३४५	३६०	३७५
१६	१६	३२	४८	६४	८०	९६	११२	१२८	१४४	१६०	१७६	१९२	२०८	२२४	२४०	२५६	२७२	२८८	३०४	३२०	३३६	३५२	३६८	३८४	४००
१७	१७	३४	५१	६८	८५	१०२	११९	१३६	१५३	१७०	१८७	२०४	२२१	२३८	२५५	२७२	२८९	३०६	३२३	३४०	३५७	३७४	३९१	४०८	४२५
१८	१८	३६	५४	७२	९०	१०८	१२६	१४४	१६२	१८०	१९८	२१६	२३४	२५२	२७०	२८८	३०६	३२४	३४२	३६०	३७८	३९६	४१४	४३२	४५०
१९	१९	३८	५७	७६	९५	११४	१३३	१५२	१७१	१९०	२०९	२२८	२४७	२६६	२८५	३०४	३२३	३४२	३६१	३८०	३९९	४१८	४३७	४५६	४७५
२०	२०	४०	६०	८०	१००	१२०	१४०	१६०	१८०	२००	२२०	२४०	२६०	२८०	३००	३२०	३४०	३६०	३८०	४००	४२०	४४०	४६०	४८०	५००
२१	२१	४२	६३	८४	१०५	१२६	१४७	१६८	१८९	२१०	२३१	२५२	२७३	२९४	३१५	३३६	३५७	३७८	३९९	४२०	४४१	४६२	४८३	५०४	५२५
२२	२२	४४	६६	८८	११०	१३२	१५४	१७६	१९८	२२०	२४२	२६४	२८६	३०८	३३०	३५२	३७४	३९६	४१८	४४०	४६२	४८४	५०६	५२८	५५०
२३	२३	४६	६९	९२	११५	१३८	१६१	१८४	२०७	२३०	२५३	२७६	२९९	३२२	३४५	३६८	३९१	४१४	४३७	४६०	४८३	५०६	५२९	५५२	५७५
२४	२४	४८	७२	९६	१२०	१४४	१६८	१९२	२१६	२४०	२६४	२८८	३१२	३३६	३६०	३८४	४०८	४३२	४५६	४८०	५०४	५२८	५५२	५७६	६००
२५	२५	५०	७५	१००	१२५	१५०	१७५	२००	२२५	२५०	२७५	३००	३२५	३५०	३७५	४००	४२५	४५०	४७५	५००	५२५	५५०	५७५	६००	६२५

गुणाकारकोष्टक.

गुणक.	१		२		३		४		५		६		७		८		९		१०		११		१२	
गुण्य.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.
०-)	·	।	·	॥	·	॥।	·	१	·	१।	·	१॥	·	१॥।	·	२	·	२।	·	२॥	·	२॥।	·	३
०=)	·	॥	·	१	·	१॥	·	२	·	२॥	·	३	·	३॥	·	४	·	४॥	·	५	·	५॥	·	६
०≡)	·	॥।	·	१॥	·	२।	·	३	·	३॥।	·	४॥	·	५।	·	६	·	६॥।	·	७॥	·	८।	·	९
१	·	१	·	२	·	३	·	४	·	५	·	६	·	७	·	८	·	९	·	१०	·	११	·	१२
२	·	२	·	४	·	६	·	८	·	१०	·	१२	·	१४	१	०	१	२	१	४	१	६	१	८
३	·	३	·	६	·	९	·	१२	·	१५	१	२	१	५	१	८	१	११	१	१४	२	१	२	४
४	·	४	·	८	·	१२	१	०	१	४	१	८	१	१२	२	०	२	४	२	८	२	१२	३	०
५	·	५	·	१०	·	१५	१	४	१	९	१	१४	२	३	२	८	२	१३	३	२	३	७	३	१२
६	·	६	·	१२	१	२	१	८	१	१४	२	४	२	१०	३	०	३	६	३	१२	४	२	४	८
७	·	७	·	१४	१	५	१	१२	२	३	२	१०	३	१	३	८	३	१५	४	६	४	१३	५	४
८	·	८	१	०	१	८	२	०	२	८	३	०	३	८	४	०	४	८	५	०	५	८	६	०
९	·	९	१	२	१	११	२	४	२	१३	३	६	३	१५	४	८	५	१	५	१०	६	३	६	१२
१०	·	१०	१	४	१	१४	२	८	३	२	३	१२	४	६	५	०	५	१०	६	४	६	१४	७	८
११	·	११	१	६	२	१	२	१२	३	७	४	२	४	१३	५	८	६	३	६	१४	७	९	८	४
१२	·	१२	१	८	२	४	३	०	३	१२	४	८	५	४	६	०	६	१२	७	८	८	४	९	०
१३	·	१३	१	१०	२	७	३	४	४	१	४	१४	५	११	६	८	७	५	८	२	८	१५	९	१२
१४	·	१४	१	१२	२	१०	३	८	४	६	५	४	६	२	७	०	७	१४	८	१२	९	१०	१०	८
१५	·	१५	१	१४	२	१३	३	१२	४	११	५	१०	६	९	७	८	८	७	९	६	१०	५	११	४

गुणक.	१३		१४		१५		१६		१७		१८		१९		२०		२१		२२		२३		२४		२५	
गुण्य.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.
०-)	·	३।	·	३॥	·	३॥।	·	४	·	४।	·	४॥	·	४॥।	·	५	·	५।	·	५॥	·	५॥।	·	६	·	६।
०=)	·	६॥	·	७	·	७॥	·	८	·	८॥	·	९	·	९॥	·	१०	·	१०॥	·	११	·	११॥	·	१२	·	१२॥
०≡)	·	९॥।	·	१०॥	·	११।	·	१२	·	१२॥।	·	१३॥	·	१४।	·	१५	·	१५॥।	१	॥	१	१।	१	२	१	२॥।
१	·	१३	·	१४	·	१५	१	०	१	१	१	२	१	३	१	४	१	५	१	६	१	७	१	८	१	९
२	१	१०	१	१२	१	१४	२	०	२	२	२	४	२	६	२	८	२	१०	२	१२	२	१४	३	०	३	२
३	२	७	२	१०	२	१३	३	०	३	३	३	६	३	९	३	१२	३	१५	४	२	४	५	४	८	४	११
४	३	४	३	८	३	१२	४	०	४	४	४	८	४	१२	५	०	५	४	५	८	५	१२	६	०	६	४
५	४	१	४	६	४	११	५	०	५	५	५	१०	५	१५	६	४	६	९	६	१४	७	३	७	८	७	१३
६	४	१४	५	४	५	१०	६	०	६	६	६	१२	७	२	७	८	७	१४	८	४	८	१०	९	०	९	६
७	५	११	६	२	६	९	७	०	७	७	७	१४	८	५	८	१२	९	३	९	१०	१०	१	१०	८	१०	१५
८	६	८	७	०	७	८	८	०	८	८	९	०	९	८	१०	०	१०	८	११	०	११	८	१२	०	१२	८
९	७	५	७	१४	८	७	९	०	९	९	१०	२	१०	११	११	४	११	१३	१२	६	१२	१५	१३	८	१४	१
१०	८	२	८	१२	९	६	१०	०	१०	१०	११	४	११	१४	१२	८	१३	२	१३	१२	१४	६	१५	०	१५	१०
११	८	१५	९	१०	१०	५	११	०	११	११	१२	६	१३	१	१३	१२	१४	७	१५	२	१५	१३	१६	८	१७	३
१२	९	१२	१०	८	११	४	१२	०	१२	१२	१३	८	१४	४	१५	०	१५	१२	१६	८	१७	४	१८	०	१८	१२
१३	१०	९	११	६	१२	३	१३	०	१३	१३	१४	१०	१५	७	१६	४	१७	१	१७	१४	१८	११	१९	८	२०	५
१४	११	६	१२	४	१३	२	१४	०	१४	१४	१५	१२	१६	१०	१७	८	१८	६	१९	४	२०	२	२१	०	२१	१४
१५	१२	३	१३	२	१४	१	१५	०	१५	१५	१६	१४	१७	१३	१८	१२	१९	११	२०	१०	२१	९	२२	८	२३	७

કોષ્ટકતિસરા

[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]		૬૧		૬૨		૬૩		૬૪		૬૫		૬૬		૬૭		૬૮		૬૯		૭૦		૭૧		૭૨		૭૩		૭૪		૭૫	
	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે	મં	શે
[illegible]	·	૭૧·	·	૮।॥	·	૮૪।	·	૮=	·	।=	·	॥-	·	॥॥·	·	૧॥≡	·	૧૮=	·	૧॥-	·	૧૧॥	·	૧॥=	·	૧॥॥-	·	૨૫-	·	૪	·	૪૨	·	૫॥-	·	૫॥
[illegible]	·	૮૧॥·	·	૮=	·	।॥	·	।-	·	॥॥·	·	૧૮=	·	૧૧॥	·	૧॥≡	·	૪·	·	૪॥=	·	૩	·	૩॥=	·	૩॥	·	૪૮=	·	૭॥-	·	૭॥=	·	૫·	·	૫॥=
[illegible]	·	૮૫·	·	।॥	·	।૫॥	·	॥-	·	૧૮=	·	૧॥≡	·	૪·	·	૪॥-	·	૩॥=	·	૩	·	૩॥=	·	૩॥	·	૪૮=	·	૭॥-	·	૭॥=	·	૫·	·	૫॥=	·	૫॥-
૬૧	·	૮=	·	।=	·	॥-	·	॥॥·	·	૧૧॥	·	૪·	·	૩	·	૩॥	·	૩॥=	·	૩॥=	·	૭॥	·	૪૮-	·	૫॥-	·	૪૮=	·	૫॥	·	૭-	·	૭॥=	·	૭=
૬૨	·	।=	·	॥	·	૧૮=	·	૧૧॥	·	૩	·	૭॥	·	૬	·	૭॥	·	૫	·	૬	·	૫॥	·	૭॥	·	૮	·	૯	·	૫॥	·	૧૦॥	·	૧૧॥
૬૩	·	॥-	·	૧૮=	·	૧॥≡	·	૫	·	૭॥	·	૫॥	·	૯	·	૧૦॥	૧	·	૧	૧॥	૧	૩	૧	૪॥	૧	૫	૧	૭॥	૧	૯	૧	૧૦॥	૧	૧૨
૬૪	·	॥॥·	·	૧૧॥	·	૫·	·	૩	·	૬	·	૯	૧	૦	૧	૩	૧	૫	૧	૯	૨	૦	૨	૩	૨	૫	૨	૯	૨	૦	૩	૩	૩	૫	૩	૯
૬૫	·	॥॥=	·	૧॥॥=	·	૩॥-	·	૩॥-	·	૭॥	·	૧૧॥	૧	૩	૧	૫॥	૧	૧૦॥	૨	૫·	૨	૬	૨	૫॥	૩	૧૧॥	૩	૫	૩	૯	૪	·॥·	૪	૫॥	૪	૮
૬૬	·	૧૮=	·	૫·	·	૩॥-	·	૭॥	·	૯	૧	૧૧॥	૧	૫	૧	૧૦॥	૨	૩	૨	૭॥	૩	·	૩	૪॥	૩	૯	૪	૧૧॥	૪	૫	૪	૧૦॥	૫	૩	૫	૭॥
૬૭	·	૧॥-	·	૫॥=	·	૩॥=	·	૫	·	૧૦॥	૧	૩॥	૧	૯	૨	૫॥	૨	૭॥	૩	·॥·	૩	૫	૩	૧॥	૪	૪॥	૪	૫॥	૫	૩	૫	૮	૬	૧॥	૬	૫॥
૬૮	·	૧૧॥·	·	૩	·	૪॥	·	૫	૧	૦	૧	૫	૨	૦	૨	૫	૩	૦	૩	૫	૪	૦	૪	૫	૫	૦	૫	૫	૬	૦	૬	૫	૭	૦	૭	૫
૬૯	·	૧॥=	·	૩॥=	·	૫૮-	·	૫॥	૧	૧૧॥	૧	૮	૨	૩	૨	૭॥	૩	૭॥	૩	૧૧॥	૪	૫	૫	·॥·	૫	૭॥	૫	૨।	૫	૯·	૭	૩॥	૭	૧૦॥	૮	૫·
૭૦	·	૧॥॥=	·	૩॥	·	૫॥=	·	૭॥	૧	૩	૧	૧૦॥	૨	૫	૨	૧૧॥	૩	૯	૪	૪॥	૫	૦	૫	૭॥	૫	૩	૫	૧૦॥	૭	૫	૮	૧૧॥	૮	૯	૯	૪॥
૭૧	·	૨૫-	·	૪૮=	·	૫૮≡	·	૮·	૧	૪॥	૨	·॥·	૨	૯	૩	૫	૪	૧૧॥	૪	૫॥	૫	૫	૬	૨॥	૫	૧૦॥	૭	૫	૮	૧૧॥	૯	૭॥	૧૦	૩॥	૧૧	૫॥
૭૨	·	૪	·	૪॥	·	૫॥	·	૯	૧	૫	૨	૩	૩	૦	૩	૯	૪	૫	૫	૩	૫	૦	૫	૯	૭	૫	૮	૩	૯	૦	૯	૯	૧૦	૫	૧૧	૩
૭૩	·	૪૨	·	૫॥=	·	૭॥-	·	૫॥	૧	૭॥	૨	૫	૩	૩	૪	·॥·	૪	૧૫॥	૫	૮	૫	૫	૭	૩॥	૮	૧૧॥	૮	૧૧॥	૯	૯	૧૦	૫॥	૧૧	૫॥	૧૨	૨।
૭૪	·	૫॥=	·	૫·	·	૭॥=	·	૧૦॥	૧	૯	૨	૭॥	૩	૫	૪	૪॥	૫	૩	૫	૧૧॥	૭	૦	૭	૧૦॥	૮	૯	૯	૭॥	૧૦	૫	૧૧	૩॥	૧૨	૨।	૧૩	૧॥
૭૫	·	૫॥-	·	૫॥-	·	૮૨	·	૧૧॥	૧	૧૦॥	૨	૫॥	૩	૯	૪	૮	૫	૭॥	૫	૫॥	૭	૫	૮	૫	૯	૪॥	૧૦	૩॥	૧૧	૩	૧૨	૨।	૧૩	૧॥	૧૪	·॥।

चवथाकोष्ठक.

		६१		६२		६३		६४		६५		६६		६७		६८		६९		७०		७१		७२		७३		७४		७५		
वर्ग	संख्या	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	रु.	आ.	संख्या
	६१	·	·	·	·।·	·	·॥·	·	१	·	१॥	·	२।	·	३	·	४	·	५	·	६	·	७॥	·	९	·	१०॥	·	१२।	·	१४	६१
१	१	०	२	०	४।	०	६॥	·	९	·	११॥	·	१४।	१	१	१	४	१	७	१	१०।	१	१३॥	२	१	२	४॥	२	८॥	२	१२	१
४	२	०	४	०	८॥	·	१३॥	१	१	१	७॥	१	१२॥	१	१५	२	४	२	९	२	१४।	३	३॥	३	९	३	१४॥	४	४।	४	१०	२
९	३	०	६	०	१२॥	१	४॥	१	९	१	१४॥	२	६॥	२	१३	३	४	३	११	४	२।	४	९॥	५	१	५	८॥	६	·।·	६	८	३
१६	४	·	८	१	·।·	१	७॥	२	१	२	७॥	३	२।	३	११	४	४	४	१३	५	६।	५	१५	६	९	७	२॥	७	१२।	८	६	४
२५	५	·	१०	१	४।	१	१४॥	२	९	३	३॥	३	१४।	४	९	५	४	५	१५	६	१०।	७	५॥	८	१	८	१२॥	९	८॥	१०	४	५
३६	६	·	१२	१	८॥	२	४॥	३	१	३	१३॥	४	१०।	५	७	६	४	७	१	७	१४।	८	११॥	९	९	१०	६॥	११	४।	१२	२	६
४९	७	·	१४	१	१२।	२	१०॥	३	९	४	७॥	५	६।	६	५	७	४	८	३	९	२।	१०	१॥	११	१	१२	·॥·	१३	·।·	१४	०	७
६४	८	१	०	२	·।·	३	·॥·	४	१	५	१॥	६	२	७	३	८	४	९	५	१०	६	११	७॥	१२	९	१३	१०॥	१४	१२।	१५	१४	८
८१	९	१	२	२	४।	३	६॥	४	९	५	११॥	६	१४।	८	१	९	४	१०	७	११	१०।	१२	१३॥	१४	१	१५	४॥	१६	८॥	१७	१२	९
१००	१०	१	४	२	८॥	३	१३॥	५	२	६	७॥	७	१२॥	८	१५	१०	४	११	९	१२	१४।	१४	३॥	१५	९	१६	१४॥	१८	४॥	१९	१०	१०
१२१	११	१	६	२	१४	४	४॥	५	९	६	१४॥	८	६	९	१३	११	४	१२	११	१४	२।	१५	९॥	१७	१	१८	८॥	२०	·।·	२१	८	११
१४४	१२	१	८	३	·।·	४	८॥	६	१	७	९॥	९	२	१०	११	१२	४	१३	१३	१५	६।	१६	१५	१८	९	२०	२॥	२१	१२।	२३	६	१२
१६९	१३	१	१०	३	४॥	४	१४॥	६	९	८	३॥	९	१४।	११	९	१३	४	१४	१५	१६	१०।	१८	५॥	२०	१	२१	१२॥	२३	८॥	२५	४	१३
१९६	१४	१	१२	३	८॥	५	४॥	७	१	८	१३॥	१०	१०।	१२	७	१४	४	१६	१	१७	१४।	१९	११॥	२१	९	२३	६॥	२५	४।	२७	२	१४
२२५	१५	१	१४	३	१२।	५	१०॥	७	९	९	७॥	११	६।	१३	५	१५	४	१७	३	१९	२।	२१	१॥	२३	१	२५	·॥·	२७	·।·	२९	०	१५
२५६	१६	२	०	४	·।·	६	·॥·	८	१	१०	१॥	१२	२	१४	३	१६	४	१८	५	२०	६।	२२	७॥	२४	९	२६	१०॥	२८	१२।	३०	१४	१६
२८९	१७	२	२	४	४।	६	६॥	८	९	१०	११॥	१२	१४।	१५	१	१७	४	१९	७	२१	१०।	२३	१३॥	२६	१	२८	४॥	३०	८॥	३२	१२	१७
३२४	१८	२	४	४	८॥	६	१३॥	९	२	११	७॥	१३	१२॥	१५	१५	१८	४	२०	९	२२	१४।	२५	३॥	२७	९	२९	१४॥	३२	४॥	३४	१०	१८
३६१	१९	२	६	४	१२॥	७	४॥	९	९	११	१४॥	१४	६	१६	१३	१९	४	२१	११	२४	२।	२६	९॥	२९	१	३१	८॥	३४	·।·	३६	८	१९
४००	२०	२	८	५	·।·	७	८॥	१०	१	१२	९॥	१५	२	१७	११	२०	४	२२	१३	२५	६।	२७	१५	३०	९	३३	२॥	३५	१२।	३८	६	२०
४४१	२१	२	१०	५	४॥	७	१४॥	१०	९	१३	३॥	१५	१४।	१८	९	२१	४	२३	१५	२६	१०।	२९	५॥	३२	१	३४	१२॥	३७	८॥	४०	४	२१
४८४	२२	२	१२	५	८॥	८	४॥	११	१	१३	१३॥	१६	१०।	१९	७	२२	४	२५	१	२७	१४।	३०	११॥	३३	९	३६	६॥	३९	४।	४२	२	२२
५२९	२३	२	१४	५	१२।	८	१०॥	११	९	१४	७॥	१७	६।	२०	५	२३	४	२६	३	२९	२।	३२	१॥	३५	१	३८	·॥·	४१	·।·	४४	०	२३
५७६	२४	३	०	६	·।·	९	·॥·	१२	१	१५	१॥	१८	२	२१	३	२४	४	२७	५	३०	६।	३३	७॥	३६	९	३९	१०॥	४२	१२।	४५	१४	२४
६२५	२५	३	२	६	४।	९	६॥	१२	९	१५	११॥	१८	१४।	२२	१	२५	४	२८	७	३१	१०।	३४	१३॥	३८	१	४१	४॥	४४	८॥	४७	१२	२५
		६१		६२		६३		६४		६५		६६		६७		६८		६९		७०		७१		७२		७३		७४		७५		

रेघांचा भागाकार.

साध्या भागाकारा प्रमाणेंच चिन्हें करून भाज्य भाजक मांडावे. आणि भाज्यांतून भाजक किती वेळां जातो तो उजवीकडे साध्या भागाकारा प्रमाणें चिन्ह करून त्यांत मांडावा. या वेळांकानें रेघां रूध्धां भाजकास गुणून, तो गुणाकार भाज्याखालीं मांडून, त्यांतून वजा करून जी बाकी राहील, तिची रेघा रूद्धां दसपट करावी, व भाज्यांतील जो अंक वर घ्यावयाचा तो शेवटच्या अंकांत मिळवावा; नंतर त्यास पुनः भाजकानें भागितां जो वेळांक येईल तो पूर्व भागाकारा उजवेकडे मांडून, त्यानें रेघां रूद्धां भाजकास गुणून तो गुणाकार दसपट करून वर अंक मिळविलेल्या रकमेंतून वजा करावा. आणि बाकीची दसपट करून पुनः वरचा अंक शेवटच्या अंकांत मिळवावा. या प्रमाणें कृति भाज्यांतील सर्व अंक संपत तों करावी. शेवटील मात्र अंक दसपटीस मिळविते वेळेस रेघां रूध्धां मिळवून भाजकानें भागून जी बाकी राहील तींतून भाजकाची पाऊणपट, अर्धपट, पावपट इत्यादि जो अंश बसेल तो भागाकारावर मांडावा. अशी कृति पाव आण्यापर्यंत करावी. इच्छा असल्यास पाव आण्याच्या निम्पटीचा तिसरा हिसा अथवा दोन तिसरे हिसे घेऊन पैचा भाग लावावा. म्हणजे उजवीकडील रकम भागाकार होईल.

+ बाकीची दसपट करण्याचें कारण जास्थानची बाकी राहिली, त्यास्थानच्चे एकांत त्याचे खालचे अंक दाहा आहेत, म्हणून दाहानीं गुणून त्या गुणाकारांत त्याचे जातीचे अंक असतील ते मिळवावे. साध्या भागाकारांत बाकीवर अंक घेणें, आणि रेघांचे भागाकारांत बाकीस दाहानीं गुणून त्यांत अंक मिळविणें हीं दोन्हीं एकच आहेत, एवढा मात्र फेर कीं, रेघांचे भागाकारांत बाकीवर त्या त्या स्थानच्या रेघा असतात याजकरितां त्याची दसपट केल्याविना वर अंक घेतां येत नाहीं.

टीप. भाजकानें भागितां, केव्हां केव्हां भागाकार दशकावर ही लागतो, तेव्हां दशक मागील अंकांत मिळविला पाहिजे हें लक्षांत ठेवावें.

उदाहरणें.

(१) ८३७१५७॥ हे भाज्य १३५॥= या भाजकानें भाग.

१३५॥=) ८३७१५७॥ (६१३॥=७

भाजकाचा निमपटी	८१५॥=
अर्धे ६७॥॥.	१७= बाकी
पावले ३३॥॥.	१८७॥ द.प.क.अं.मि.
चवळे १५॥॥७॥	१३५॥=
आणे ८॥५.	४७॥– बाकी
अर्धआ.४ ५॥॥=	४९३॥ना. द.क.अं.मि.
पा.आ. २८॥॥–	४०७॥–
पै.अध. ११ ॥५.	८५॥॥. बाकी
	६७॥॥.
	१७॥–
	१५॥॥॥७॥
	॥–७॥
	॥५.
	८॥॥१॥. बाकी.

अथवा.

१३५॥=) ८३७१५७॥.
६१३ भाग.
८५॥॥. बा.
१६
१३७५॥ आ.
१३५५=
१३८=
१२
१५७॥ पै
१३५॥=
पैचा अंश. ५॥–
उत्तर. ६१३॥=१

(२) २८७॥= हे भाज्य ॥५॥ या भाजकानें भाग.

उत्तर ५३३॥॥–

त्रैराशिक.

प्रथमप्रकार.

त्रैराशिक ह्मणजे दोन कल्पित् प्रमाणपदांच्या आधारानें तिसरें पद

ची किंमत काढणें. त्या दोन कल्पित पदांचें गुणोत्तर+, तिसरें पद आणि येणार चवथें पद यांचें गुणोत्तर बरोबर असावें. यांत आदि, मध्य आणि अंत अशीं तीन स्थानें आहेत.

रीति.

तीन पदां मध्यें ज्याची जात इच्छिलेल्या उत्तराची सारखी आहे, तें तिसरे स्थानीं मांडावें; आणि असा विचार करावा कीं, घेतल्या दोन प्रमाण पदांच्या आधारानें इच्छित उत्तर तिसरे स्थानचे पदापेक्षां लहान होईल किंवा मोठें होईल? जर मोठें होईल अशी कल्पना झाली, तर त्या दोन राहिल्या पदां मध्यें जें मोठें असेल, तें दुसरे स्थानीं मांडावें; आणि लहान प्रथम स्थानीं मांडावें; परंतु जर इच्छित उत्तराची संख्या तिसरे पदापेक्षां लहान होईल, तर विपरीत ह्मणजे लहान पद दुसरे स्थानीं आणि मोठें पद प्रथम स्थानीं मांडावें; त्यांत प्रथम आणि दुसरे स्थाना मध्यें : असें चिन्ह करून दुसरें आणि तिसरें स्था मध्यें :: असें चिन्ह करावें. नंतर तिसरे स्थानांतील पदाला दुसऱ्या स्थानांतील पदानें गुणून, त्या गुणाकाराला प्रथम स्थानांतील पदानें भागावें. जो भागाकार येईल तें उत्तर; तिसरे पदाची किंमत. हें उत्तर तिसरे स्थाना पुढें : असें चिन्ह करून मांडावें.

किंवा वर सांगितल्या प्रमाणें पदें मांडिल्यावर प्रथम व दुसरे स्थानांतील पदांचें गुणोत्तरानें ह्मणजे भागाकानें तिसरे स्थानांतील पदास गुणावें; गुणाकार येईल तें चवथें पद, इच्छाफळ (उत्तर)

+ गुणोत्तर ह्मणजे दोन संख्यांचा भागाकार, परंतु येथें दुसरे संख्येला प्रथम संख्येनें भागिलेला भागाकार घ्यावयाचा; विपरीत घ्यावयाचा नाहीं.

तिसरे स्थानांतील पदाचे जातीचें येईल.

या रीतींत हा एक मोठा विचार आहे कीं, उत्तर प्रमाणपदाचे कि मतीपेक्षां जास्ती येईल. किंवा कमी येईल या विचाराकडे शिक णारांनीं पुर्तेंलक्ष दिले ह्मणजे त्रैराशिक करण्यास कोणतीही अ-डचण पडणार नाहीं.

जेव्हां पहिले व दुसरे स्थानांतील अंक विविधजातीचे (कांहीं भा रीव कांहीं हलके) असतील. तेव्हां उतरते भांजणीचे रीतीनें त्या दो न स्थानांत जो अतिहलके जातीचा अंक असेल, त्या जातींत दोन्ही स्थानाचे अंक आणून वर सांगितल्या प्रमाणें कृति करावी.

जर तिसरे स्थानांतील ही अंक विविधजातीचे असतील, तर उतर ते भाजणीचे रीतीनें तेही हलके जातींत आणून, वर सांगितल्याप्रमा णें कृति करून उत्तर आणावें. जें इच्छाफळ येईल तें त्याच हलकेजा तीचें होईल. नंतर त्यास चढते भांजणीचे रीतीनें भारी अंकाचें रूप द्यावें.

अथवा. विविधगुणाकार व भागाकार रीती प्रमाणें या तिसरे स्थानांतील पदास दुसरे स्थानांतील अंकानें गुणून, त्या गुणाकारा स प्रथम स्थानांतील अंकानें भागावें, जो भागाकार येईल, तें उत्तर.

अथवा. प्रथम आणि दुसरे स्थानांतील अंकांच्या गुणोत्तरानें वि विध गुणाकार रीती प्रमाणें या तिसरे स्थानांतील पदास गुणावें, ह्मणजे इच्छाफळ उत्पन्न होईल.

दुसरा प्रकार.+

+ मला असें वाटतें कीं, विजातीय पदांचा गुणाकार व भागाकार होणें हें

त्रिराशि गणित ह्मणजे तीन स्थानीं तीन अंक राशि मांडून त्यापासून चवथा अंक उत्पन्न करण्याची रीति आहे; यास्तव तिचें नाव त्रिराशि अथवा त्रिप्रमाण ह्मणावें. हीरीति फार उपयोगाची आहे; याजकरितां हिला सुवर्णरीती ह्मणतात.

या रीतींत आदि, मध्य, अंत, हीं तीन स्थानें आहेत; त्या तीन स्थानीं तीन अंक लिहावे. त्यांत प्रमाण आणि इच्छा हे दोन अंक समानजाति आणि तिसरा अन्यजाति असतो. प्रमाणांक आदिस्थानीं लिहावा, इच्छांक अंतस्थानीं लिहावा. आणि अन्यजाति अंक मध्यस्थानीं लिहावा. या तीन अंकांपासून गणित रीतीनें चवथा अंक उत्पन्न होतो, त्याचें नाव इच्छाफल. हा इच्छाफलांक मध्यांकाशीं समानजाति असतो.

या रीतींत दोन भेद आहेत, समत्रिराशि आणि व्यस्त त्रिराशि.

जेव्हां इच्छांक प्रमाणांकापेक्षां अधिक आहे, आणि, इच्छाफलांक मध्यांकापेक्षां अधिक होण्यास योग्य आहे, अथवा इच्छांक प्रमाणांकापेक्षां उणा आहे, आणि इच्छाफलांक मध्यांकापेक्षां उणा होण्यास

अशक्य होय. यांतून गुणाकारा विषयींतर रेषांचे गुणाकार प्रकरणीं टिपेमध्यें (पृष्ठ ४२) येत लिहिलेंच आहे. आतां भागाकारा विषयीं लिहितों.

भागाकार ह्मणजे वजाबाकी होय. तेव्हां एकजातीच्या रकमेंतून दुसऱ्याजातीची रकम वजा करणें ह्मणजे अर्थ कांहीं नाहीं; जसें कांहीं खंडी आहेत त्यांतून कांहीं रुपये वजा कर ह्मणजे हें होणें अशक्य, तर त्या खंडींतून दुसऱ्या खंडी अथवा खंडीचे अंश वजा करणें व्यवहारास व गणितास उपलब्ध आहे. याकरितां मीजो प्रकार प्रथम लिहिला आहे, त्यांत वर लिहिलेला अशक्य भाव येत नाहीं ह्मणून जितकें त्या प्रकारास अनुसरवेल तितकें अनुसरावें. हें बरें, तथापि शाळांतून जीं गणिताचीं पुस्तकें आहेत, त्यांतून जी रीति लिहिली आहे ती ही लिहून त्या दोहींचा सारासार विचार करणें तो शिकविणारांवर ठेविला आहे.

योग्य आहे, तेव्हां समत्रिराशि ह्मणावें.

जेव्हां इच्छांक प्रमाणांकापेक्षां अधिक आहे, आणि इच्छाफळांक मध्यांकापेक्षां उणा होण्यास योग्य आहे, किंवा इच्छांक प्रमाणांकापेक्षां उणा आहे, आणि इच्छाफळांक मध्यांकापेक्षां अधिक व्हावयास योग्य आहे, तेव्हां व्यस्त त्रिराशि ह्मणावें.

इच्छाफळ उत्पन्न करण्याची रीति.

समत्रिराशि आहे तेव्हां मध्यांक अंत्यांकानें गुणावा, तो गुणाकार आद्यांकानें भागावा, जो भागाकार येईल, तो चवथा अंक ह्मणजे इच्छाफळ उत्पन्न होईल.

व्यस्त त्रिराशि आहे तेव्हां मध्यांक आद्यांकानें गुणावा, तो गुणाकार अंत्यांकानें भागावा, जो भागाकार येईल, तो चवथा अंक इच्छाफळ उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

(१) १२ हात वस्त्रास १० रुपये ६ आणे २ पै पडतात तर ४० हातांस काय पडेल?

आदि. मध्य. अंत. इच्छाफळ
हात हात. रु. आ. पै रु. आ. पै
१२ : ४० :: १०..६..२ : ३४..९..१०

१६
१६६ आ.
१२
१९९४ पै
४०
१२) ७९७६०
१२) ६६४६ पै(१०
१६) ५५३ आ(९
३४ रु

अथवा.

आ. म. अं.
हा. हा. रु. आ. पै
१२ : ४० :: १०..६..२
४०
१२) ४१५..४..८
३४..९..१०

रु. आ. पै
उत्तर ३४..९..१०

(२) १६ काठ्या रुंदीची पुष्कळ काठ्या लांब जमीन आहे, तींतून १बि घा दुसऱ्यास देणें तर किती काठ्या लांब द्यावी?

आदि.		मध्य.		अंत.		इच्छाफळ
रुंदी का.		रुंदी का.		लांबी का.		लांबी की.
१६	:	२०	::	२०	:	२५

२०
१६)४००
२५

(३) कोणी मनुष्यानें १८ रुपये तोळा याप्रमाणें ५०० रुपयांचें सोनें खरेदी केलें. आणि एक तोळा सोनें ठेवून बाकी ५० रुपये नफा करून विकलें तेव्हां कोणत्या दरानें विकलें?

रु॰ आ॰ पै
उत्तर २०.. ८.. ७

(४) दर रुपयास ७ पायली प्रमाणें कांहीं रुपयांचें धान्य विकत घेऊन ५ पायली प्रमाणें विकलें आणि पुनः पांच पायली प्रमाणें तितकेच रुपयांचें विकत घेऊन तें ७ पायली प्रमाणें विकलें. त्या व्यापारांत २५ रुपये नफा झाला, तेव्हां पूर्वी किती रुपयांचें धान्य घेतलें होतें.

रु॰ आ.
उत्तर २१८.. १२

(५) कोणी मनुष्यानें दर शेरास पांच पैसे प्रमाणें ५ मण गूळ खरेदी करून २० रुपये दिले, तेव्हां एक रुपयाचा भाव काय?

उत्तर ५० पैसे.

(६) ३५० पृष्ठांचें एक पुस्तक वरील मक पृष्ठा सांध्यां १ रुपया ४ आण्यास मिळतें आणि दुसरें १०० पृष्ठांचें एक पुस्तक त्याच जातीचें तसे मळ पृष्ठांचें १५ आण्यास मिळतें, तेव्हां त्या मळ पृष्ठाची किंमत का

य१ उत्तर ५ आणे.

(७) ४ वाजल्या नंतर अवर कांटा आणि मिन्यूट कांटा हे एकावर एक, समोरासमोर, व दोहों कडे २५ अंशांचा कोन करून असल्यास त्या त्या वेळीं किती वाजले असावे?

	अ.	मि.	से.		अ.	मि.	से.
उत्तर { भेट	४	२१	४९ $\frac{1}{11}$	पूर्वकोन	४	१५	२७ $\frac{3}{11}$ }
समोरास	४	५४	३२ $\frac{8}{11}$	मागीलकोन	४	२८	१० $\frac{10}{11}$ }

(८) कोणीं मनुष्यानें १ पैशास ३ प्रमाणें १५० आंबे खरेदी केले आणि १ पैशास २ प्रमाणें कांहीं पैशांचे आंबे खरेदी केले. नंतर २ पैशांस ५ प्रमाणें सर्व आंबे विकले तेव्हां त्यास ८ पैसे नफा झाला तर त्याणें दर पैशास २ प्रमाणें किती पैशांचे आंबे खरेदी केले होते.

उत्तर ११५ पैसे.

(९) कोणीं एकानें एक चाकर ठेविला. त्याचा वर्षाचा करार २५ रुपये आणि एक पागोटें द्यावें असा होता, पुढें त्यानें १० महिने चाकरी करून १८ रुपये आणि एक पागोटें नेलें तेव्हां पागोट्याची किंमत काय?

उत्तर ७ रुपये.

(१०) दर खंडीस १२ रुपये ६ आणे प्रमाणें १२५ रुपयांचें धान्य खरेदी केलें; त्यांतून २ खंडी ४ मण धान्य घर बेगमी करितां ठेवून बाकीचें मूळ खरेदीस विकलें तर विक्रीचा दर काय होता?

रु. आ. पे.
उत्तर १९ .. ९ .. ५ $\frac{50}{561}$

(११) कोणीं एक मनुष्य समुद्र स्नानास निघाला, तो दररोज सात कोस जाऊन २ कोस वस्तीस परत येई. जर त्या मनुष्याचे घरापासून ६९ कोसांवर समुद्र असला, तर त्याला कितवे दिवशीं समुद्र

स्नान घडेल? उत्तर १६वे दिवशीं.

(१२) अ मजूर कांहीं काम २तासांत करितो, तेंच बमजूर २घटिकेंत करितो, तेव्हांजर अला दररोजचे तीन आणे दिले, तर बला किती द्यावे? आ. पै.

उत्तर ७ .. ६

(१३) एक मनुष्य होडींत बसून चढते पाण्यांत एक अवरांत तीन मैलजातो आणि उतरते पाण्यांत १०मैलजातो याप्रमाणें तो कोणे एके स्थळाहून नदींतून वरजाऊन ९अवरांत पुनः परत आला व त्या स्थळीं त्यानें १॥तास विश्रांति घेतली होती, तेव्हां तो किती मैल वरून जाऊन आला? मै. या. फू.

उत्तर. १७ .. ५४१ .. १ $\frac{६}{१३}$

(१४) अनें २० बिघे आणि बनें २५ बिघे इतक्या सारखे दरानें जमिनी खरेदी केल्यानंतर अनें आपली जमीन विकली, त्यास ५५०रुपये नफा झाला व बनें दोन बिघे घरीं ठेवून त्याच दरानें आपली विकली, तों त्यास २२५रुपये नफा झाला; परंतु बजर आपली सर्वजमीन विकता, तर त्यास २७५ रुपये नफा झाला असता. यावरून दर बिघ्यास खरदीचे व विकरीचे किती रुपये असावे?

उत्तर ६० खरदीचे रु. ७५ विक. रु.

(१५) एका बंदरावरून २खंडी धान्य २० मनुष्यांनीं २खेपांत आणून १२आणे मजुरी घेतली तर त्याच बंदरावरून दुसरे वेळेस ७खंडी धान्य २५ मनुष्यांनीं ५खेपांत आणिलें असतां, त्यांस किती मजुरी द्यावी? उत्तर २रुपये १२आणे.

(१६) दरमनुष्यास दररोज २शेर प्रमाणें ५महिने पुरे इतकें अन्न संग्रहीं आहे तेंच ७महिने पुरविणें तर दर मनुष्यास दररोज किती शेर खर्च करावें?   उत्तर १शेर १ $\frac{५}{७}$ पावशेर.

(१७) दरमणी ५रुपये ६आणे प्रमाणें तुपाचा भाव असतां कोणी मनुष्य आपले कुटुंबास एक महिन्यास ३मण १५शेर तूप खर्च करितो, तर ७रुपये ९आणे दरमणीं भाव असतां त्यानें किती तूप खर्च करावें? ह्मणजे त्यास अधिक पैसा लागणार नाहीं?

उत्तर २मण १५ $\frac{११५}{१२१}$ शेर तूप.

(१८) पृथ्वी आपल्या आसाभोंवती एक अहोरात्रांत एक वेळ फिरत्ये, तर मध्यरेषेवरील राहाणारास एक तासांत तिचे बरोबर किती मैल जावें लागेल? पृथ्वीचा परीघ २५,००० मैल आहे.

उत्तर १०४१ $\frac{२}{३}$ मैल.

(१९) एका मनुष्याचे कुटुंबास एक महिन्यास सोळुळें मापानें ४मण १२पायली तांदूळ लागतात, तर बारुळें मापानें किती लागतील?

म॰ पा॰
उत्तर ६ .. ५

(२०) एका तळ्यांत कांहीं कमळें होतीं त्यांवर भ्रमरांचा समुदाय येऊन बसला. प्रत्येकावर दोन दोन बसले, तेव्हां पांच भ्रमर शिलक राहिले; ह्मणून तीन तीन बसले तेव्हां ५ कमळें शिलक राहिलीं. यावरून भ्रमर व कमळें किती किती होतीं.

भ्र॰ क॰
उत्तर २९..१७

(२१) कोणी मनुष्य एका देवळाचे समोरचे दरवाजापासून त्या देवळास प्रदक्षिणा करूं लागला तर त्याचे प्रदक्षिणेंत तो दरवाजास

मोर किती वेळ येईल.

(२२) साडे तिशेरी मापाचे कांहीं मण आहेत. तर त्याचे सवा तिशेरी कसे करावे? व सवा तिशेरी असल्यास साडे तिशेरी कसे करावे?

(२३) कांहीं धान्य किरकोळीनें ७ पैशास २पायली मिळतें व तेंच धान्य एक रुपयाचें १८पायली मिळतें; तर असें होण्याचें कारण काय?

(२४) एका झाडाची उंची कादावयाची आहे. ती मंत्रा वांचून कशी कादावी?

(२५) ६४ दिवसांत कोणी एकवार अधिक असा किती वेळां येईल.

समस्तराशिक.

समस्तराशिक ह्मणजे जास पंचराशिक सप्तराशिक इत्यादि ह्मणतात.

रीति.

जें पद इच्छित उत्तराशीं सजातीय असेल, तें तिसरे स्थानीं }:: असा कौंस व चिन्ह करून, त्या पुढें मांडावें, नंतर त्यांतून सजातीय दोन पदें व हें तिसरें पद मिळून त्रिराशि मनांत आणून असा विचार करावा कीं, या तिसरे पदापेक्षां उत्तर अधिक येईल, किंवा उणें येईल जर अधिक येईल, असें असेल, तर या सजातीय दोन पदांतून मोठें पद मध्यें मांडावें. आणि कमी येईल असें असेल तर लहान पद मध्यें मांडावें; आणि या दोन पदांमध्यें : असें चिन्ह करावें. या प्रमाणें सर्व सजातीय दोन दोन पदें घेऊन त्यांचा तिसरे सामान्य पदाशीं विचार करून उणे अधिक प्रमाणानें सर्व पदें मांडावीं. नंतर दु

सरे स्थानांतील सर्व पदांचा गुणाकार करून, त्यास तिसरे स्थानांती ल सामान्य पदानें गुणून, त्या गुणाकारास प्रथम स्थानांतील सर्व प दांचे गुणाकारानें भागावें भागाकार येईल तें उत्तर.

टीप. जर पहिले व दुसरे स्थानांतील अंक समान असतील, तर गुणाकार करते वेळीं ते रद्द करून गुणाकार करावा. कदाचित् प्रत्ये क सजातीय पदांत कांहीं भारी व कांहीं हलके अंक असतील, तर त्रै राशिकाचे रीतींत लिहिल्या प्रमाणें त्यास एकजातीय करून वर लि हिल्या प्रमाणें करावें.

उदाहरणें.

(१) १२० मनुष्यें २० दिवसांत १०० हात काम करतात तर १६० हात काम ४० मनुष्यें किती दिवसांत करतील?

मनुष्यें. ४० : १२० } :: २० दिवस सामान्यपद
हात १०० : १६०

४००० . १९२००
× २०
४०००) ३८४००० (
९६ दिवस.

अथवा.

म. ४० : १२० } :: २० दि.
हा. १०० : १६०

$$\frac{१२०\times१६०\times२०}{४०\times१००} = ९६ \text{ दिवस}$$

उत्तर ९६ दिवस.

(२) कांहीं एक काम २२ मनुष्यें ९ अवराचे ३५ दिवसांत करितात तर तेंच काम २४ मनुष्यें १० अवराचे दिवसाप्रमाणें किती दिवसां त करतील. उत्तर २८ $\frac{७}{८}$ दिवस.

(३) २० गाईंस ८ आठवड्यांस २ खंडी १६ मण दाणा लागतो, तर ३९ गाईंस २५ आठवड्यांस दाणा किती लागेल. खं. म. उत्तर. ११ - १४

(४) जेव्हां प्रातःकाळीं ७ वाजतां सूर्योदय होतो तेव्हां ८ मनुष्यें २० दिवसांत २२० यार्ड काम करितात तर ५ वाजतां सूर्योदय जाहल्यास १५ मनुष्यें २४ दिवसांत किती यार्ड काम करितील? उत्तर. १००८ यार्ड.

(५) १५ मनुष्यें ११ अवरांचा २५ दिवसांत ५२० यार्ड लांब २ हात रुंद १५ फुट उंच अशी भिंत बांधितात तर ११ मनुष्यें ८ अवरांचा ५० दिवसांत १६५० यार्ड लांब ६ हात रुंदी अशी भिंत किती फुट उंच बांधितील?

वरावर्दीगणित.

वरावर्दीगणित (संक्षेपत्रैराशि अथवा मराठी हिशेब)

व्यवहारी हिशेब तोंडानें करितां यावें; ह्मणून यांचा एथें संग्रह केला आहे.

व्याख्या- कोणतेही वस्तूचे दराला त्या वस्तूचे भारी किंवा कमी जातीचे संख्येनें गुणिलें असतां, त्या गुणाकाराला कच्चे ह्मणावें.

धान्य कैली सोकुळें माप.

रीति.	उदाहरणें वउत्तरें.
(१) खंडीवरून मणाची किंमत खंडीचे दरास मणानीं गुणावें गुणाकार येईल ते कच्चे. २० कच्च्यांस रुपया, १ कच्चा = आणा, दर कच्चा = २० रेंस, अथवा २४ दाम, कच्चाचे आण्यास १। रेंस अथ = १॥ दाम	खंडीस रुपये २४॥, ७॥ मणाची किंमत. तपशील २४॥। ७॥ २०) ६१। कच्चे रुपये ३८ = हे उत्तर.

(२) खंडीवरून पायलीस, २०क. आणा, दरक. १ रेस अ. १॥ दाम.	खंडीस रुपये ८३॥ ।, ५॥ पायलीची कि? कर्चे ६७॥ = ७॥ उत्तर ८५.
(३) खंडीवरून शेरास ८०क. आणा, दरक. २ विस्वे.	खंडीस रुपये १३॥ = ५ शेरां. कि. ? क. ३०॥ ७॥ उत्तर ७१॥ २ वि.
(४) खंडीवरून शिरघास. दरकच्या स. ॥। विस्वा.	खंडीस रु. २५। =, ॥। शि. किं. क. ३७।७। उत्तर ७।८
(५) मणावरून पायलीस. १६क. रु. दरक. आणा क. चे आण्यास. ॥। पै.	मणास रु. १।, ५। पायलीची किंमत? क. १८= उत्तर ८२७॥
(६) मणावरून शेरास ६४क. रु., दरक. पाव आणा.	मणास रु. १॥ =, १॥ शेरा. किंमत? क. ४= उत्तर ७।१॥।
(७) मणावरून शिरघास. ४क. पाव आणा, दरक. ॥। पै.	मणास रु. १८=, ३ शिरघां. किंमत? क. ३। = उत्तर ८५। .

बारुळेमाप.

(८) खंडीवरून पायलीस. १५क. आणा, दर क. २ दाम, १ क. १पै.	खंडीस रु. २३। =, ४ पायली. कि. क. २५। ।। उत्तर ८५॥ .
(९) खंडीवरून शेरास. ६०क. आणा, दर क. ४ विस्वे.	खंडीस रु. २५। =, १॥। शेरा. किं. क. ४७॥ ७. उत्तर ७॥ .
(१०) खंडीवरून शिरघास. २०क. पै, दर क. १ विस्वा.	खंडीस रु. ८७॥ -, १॥। शिर. किं. क. ७०।७॥ उत्तर ८८५। .
(११) मणावरून पायलीस. १२क. रु., दरक. १६पै. क. आ. १पै.	मणास रु. १॥ =, ५॥ पायलीची किं. क. ७।७. उत्तर । = ८५.
(१२) मणावरून शेरास ३क. आणा द. क. ४पै.	मणास रु. १। =, १ शेराची कि. क. १। = उत्तर ७५॥.

(१३) मणावरून शिरद्यास १२क० आणा, दरक० १पै.	मणास रु० १८॥, २ शिरद्यां० किं० क० ५= उत्तर ८८॥.

वजनी.

(१४) खंडीवरून मणास २०क० रु० १।क० आणा १क० २०रें० अ० २५दाम.	खंडीस रु० ३४।= ४॥ मणाची किं० क० ९८८५. उत्तर ३॥=८९
(१५) अट्कीवरून मणास ८क० रु०, दरक० २आणे कच्चा आण्यास १॥पै	अट्कीस रु० २५।=, ४॥ मणाची किं० क० ६४४५। उत्तर ८१५.
(१६) खंडीवरून धड्यास ५क० आणा, दर क० ५रेंस.	खंडीस रु० ७॥।, २ धड्यांची किं० क० ७॥ उत्तर ॥।॥
(१७) अट्कीवरून धड्यास ३२क० रु० १, दरक० अर्धआणा.	अट्कीस रु० १७॥=, २ धड्यांची किं० क० ५५॥= उत्तर १॥।७१॥
(१८) खंडीवरून शेरास ५०क० आणा, दरक० ॥ रेंस.	खंडीस रु० ८॥=, ५ शेरांची किंमत? क० ४०३८= उत्तर ॥७॥.
(१९) अट्कीवरून शेरास २०क० आणा, दरक० १रेंस.	अट्कीस रु० ७५।, ३ शेरां० किमत? क० २२५।. उत्तर ॥५१
(२०) मणावरून धड्यास ४क० रु०, दरक० ४आणे.	मणास रु० २७।=, १ धड्या० किंमत? क० २७।= उत्तर ६७।.
(२१) मणावरून शेरास ४क० रुपया, ५।क० आणा, दरक० १०रेंस.	मणास रु० ३।=, २॥ शेरांची किंमत? क० १५।= उत्तर ।-७

(२२) मणावरून पावशेरास. ५६० क. रु, १० क. आ., दर क. ४ रेंस अथवा २ दाम. } मणास रु. ३॥।, २ पावशे. किं. क. ७॥= उत्तर ८॥.

(२३) धडया वरून शेरास १० क. रु., दर क. १॥ आ. ४ रें. } धड्यास रु. ।।, २ शेरांची किं. क. १।= उत्तर ८।.

(२४) धडया वरून पावशेरास. ४० क. रुपया, दर क. १० रेंस. } धड्यास रु. ॥=, १ पावशेरा. कीं. क. ॥= उत्तर ९.

सोनें, रुपें इत्यादि मोलवान पदार्थ.

(२५) तोळ्यावरून माशास. १२ क. रु., दर क. १६ पै, क. आण्यास १ पै. } तोळ्यास रु. १७॥, २ माशा. किं. क. ३४॥÷ उत्तर ४॥।.

(२६) तोळ्या वरून गुंजेस. ६ क. आणा, दर क. २ पै. } तोळ्यास रु. १७॥=, १॥ गुंजे. किं. क. २५= उत्तर ।-१॥।४।.

(२७) तोळ्यावरून उडदास. २४ क. आ., २ क. १ पै. } तोळ्यास रु. १४।, २ उडदांची किं. क. ४।।. उत्तर ८॥ ५.

(२८) माशावरून गुंजेस. ८ क. रु., दर क. २ आणे, क. आ. ११ पै. } माशास रु. १८=, १। गुंजेची किं. क. १।४।. उत्तर ८॥.॥।.

तांबें वगैरे पक्के वजन.

(२९) शेरा वरून तोळ्यास. ८०। क. आणा. दर क. ६ पैसे. } शेरास ॥=, २ तोळ्यांची किं. क. ३।- उत्तर ८॥.

तैनात.

(३०) वर्षावरून महिन्यास. १२ क. रु. द. क. १६ पै. } वर्षास रु. ३८।=, ७ महिन्याची तैना. क. २७०॥- उत्तर २४।-९

(३१) वर्षावरून दिवसास. २४। क॰ आ॰ ॥। क॰ १ दाम.	वर्षास रु॰ ४००, २ दिवसांची तैनात. क॰ ००० उत्तर २८-६४
(३२) तिशी महिन्यावरून दिवसास. कत्र्याचा निमे आणे व क॰ इतके दाम.	महिन्यास २५ रु॰, ३ दिवसांची तैनात. क॰ ७५ उत्तर ४।

बिघावणी.

(३३) बिघ्यावरून पांडास व पांडावरून काठीस. २० क॰ रु॰, १। क॰ १ आणा, क॰ २० रेंस अ॰ २४ दाम.	बिघ्यास. १७ =, ४। पांडाची किंमत. क॰ ३६८। उत्तर. १॥।-॥।१।
(३४) बिघ्यावरून काठीस. ४०० क॰ रु॰, २५ क॰ आणा, दर कत्र्यास १ रेंस.	बिघ्यास ४८। रु॰, २ काठ्यांची किं॰ क॰ ८४। उत्तर ०४२८=

शेंकडावण.

(३५) हजारावरून कोणत्याही संख्येस. ६४। क॰ आणा. ४। क॰ १ रेंस.	हजारीं ९० रुपये, २२५ यांची किं॰ क॰ २९२५। उत्तर. २४ रु॰
(३६) शेंकड्यावरून कोणत्याही संख्येस १०० क॰ रुपया, ६ क॰ आणा दर क॰ ४ रेंस.	शेंकडा ४। =, २० संख्येची किं॰ क॰ ७८॥ उत्तर. ॥।७।१

व्याज.

नेमले मुदलावर नेमले मुदतीस जो नफा वेणें त्यास व्याज ह्मणावें.

दरसालदरशेंकडा रुपये १२, ९, ६, ३, १८, २४ व्याजाचा दर असला ह्मणजे त्यास एकोत्रा, पाऊणोत्रा, अर्धोत्रा, पावोत्रा, दिढोत्रा, दुहोत्रा इत्यादि ह्मणण्याची चाल आहे.

(३७) वर्षावरून महिन्याचें व्याज करणें तर सुदलास महिन्यानीं गुणावें. एकोत्रा दर असल्यास १०० करु० ध० क० आणा, दर क० ४ रेंस पाउणोत्रा १०० कच्या १२ आणे, दर क० ३ रेंस, अर्धो॰ ।दर क० २ रेंस, पावोत्रा, १ रेंस, दिढोत्रा दर क० ६ रेंस इत्यादि.

सुद्दल रु० ३५।= यांचें अडिच महिन्याचें व्याज किती?
क० ८१॥ ञा।
।॥- ८१ एको० ८८ पावो०
।।॥१ पाउ० १६८॥१ दि०
।ञा अर्धो० १॥=८२ दु०

(३८) कोणताही व्याजाचा दर असल्यास एकोत्रा प्रमाणें सांगितलें सुदलाचें व्याज करावें, आणि सांगितले दराला बारानीं भागून, त्या भागाकारानें पूर्व व्याजास गुणावें.

२७॥= सुद्दल ५॥ महिन्याचें व्याज दर साल दर शेंकडा ८ रुपये प्रमाणें क० १२ञा।।।
एकोत्रा प्रमा० आ० १६ञा॥५
१२) ८॥ञा।
रुपये हें उत्तर ।॥।॥

(३९) वर्षावरून दिवसास सुदलास दिवसानीं गुणावें गुणाकारास ३०नीं भागावें येतील ते पक्के कच्चे. नंतर वर्षावरून महि० सांगि० प्रमा० करावें.

१६३॥।।। सुद्दल, ५ दिवसांचें व्याज एकोत्रा प्रमाणें क० ८१४॥।
पक्के क० २७।-८१
उत्तर ।।१॥

उलटरीतीनें.

(१) पायलींवरून खंडीस (सो०) पायलीचा आण्यांस २०नीं गुणून त्या गुणाकारास पायल्यांनीं भागावें. भागाकार येईल ते खं० रु०	२ पायलींस ।॥, खंडीची किं० रु० ११० (सो०मा०) ७४॥।८
(बारोळी) आण्यास १५नीं गुणून पायल्यांनीं भागावें. भागाकार येईल ते खं० रु०	रु० ८४। (बा०मा०) रु० ५७॥
(२) शिरघांवरून खंडीस (सो०) शिरघांचा विस्व्याला चौदांनीं गुणून २ भागावें. भागाकारास शिरघांनीं भागावें. येतील ते रुपये.	२ शिरघांस ८ खंडीची किं० रु० १३३॥-१ (सो०मा०) ४७३॥
(बारोळी) शिरघांचा विस्व्याला शिरघांनीं भागून येतील ते रुपये.	रु० १०० (बा०मा०) रु० ३३।-१

वजनी.

(३) गुंजांवरून तोळ्यास गुंजांचे आण्यांस ६नीं गुणून गुंजांनीं भागावें येतील ते रुपये अ० गुंजांचा पैची निंपट करून त्यास गुंजांनीं भागावें. भागाकार येईल ते रु०	॥ गुंजेस ८॥ आणे, तोळ्याची किंमत काय? रु० १४।. उत्तर, १२ रु०

(४) शेरांवरून खंडीस. शेरांचे आण्यांस ५० यांणीं गुणावे आणि शेरांचे संख्येनें भागावें भागाकार येईल ते रुपये. अ० शेरांचे रेसां ची निंपट करून, शेरानीं भागावें भागाकार येईल ते रुपय	५ शेरांस ४ आणे, खंडीची किंमत काय? क्र० २०० उत्तर ४० रुपये.
(५) काठ्यांवरून बिघ्यास. काठ्यांचा आण्यांस २५ सानीं गुणावें आणि त्या गुणाकारास काठ्यांनीं भागावें भागाकार येईल ते रुपये.	७ काठ्यांस ५। आणे तर बिघ्याची किंमत काय? क्र० ६५। उत्तर ११॥=॥१।.

या प्रमाणें जितक्या उलट खाली आहेत, तितक्या त्यांचे उलट समजाव्या.

व्याज.

व्याज ह्मणजे नेमले मुद्दलावर नेमले मुदतीस जो नफा घेणें तें.

व्याजाचे दोन मुख्य प्रकार आहेत, सरळ आणि चक्रवाढ.

सरळ व्याज.

मुदतीस जितकीं वर्षे झाली, असतील तितके वर्षांचे नेमले दरानें एकदम व्याज करणें, याचे द्वितीय त्रैराशिक व पंचराशिक याचे रीतीनें करावें.

मुदतीचे आंत कांहीं रकमा रिणको कडून परत आल्याअस-

तील, तर एकंदर रकमेचें व्याज अखेर मुदती पर्यंत करून, त्यांत पा वत्या रकमेचें व्याज अखेर मुदती पर्यंत जें होईल, तें वजा करावें.

उदाहरणें.

(१) ४४५ रुपये ५ वर्षे ३ महिने दरसाल दरशेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें होते त्यांचें व्याज किती होईल?

$$\left.\begin{array}{lll} \text{महिने.} & १२ & : ६३ \\ \text{मुद्दल रु.} & १०० & : ४४५ \end{array}\right\} :: ५ \text{ रुपये.}$$

$$\frac{\overset{२१}{\cancel{६३}} \times \overset{८९}{\cancel{४४५}} \times \overset{१}{\cancel{५}}}{\underset{४}{\cancel{१२}} \times \underset{२०}{\cancel{१००}}} = \frac{१८६९}{१६} = ११६ \text{ रु.} \cdot\cdot १२ \text{ आ. व्याज}$$

(२) कोणी एकानें दरसाल दरशें० ५ रु० व्याजाचे दरानें ४ महिने ७ दिवसांनीं १३२ रुपये ६ आणे व्याज मुद्दल रास आणून दिली, तेव्हां मुद्दल किती होतें?

रु. आ. पै.

उत्तर १३० .. १ .. २

(३) कोणी एका मनुष्यानें एका सावकाराचे दरसाल दर शेंकडा पांच रुपये व्याजाचें दरानें सकाळीं कांहीं रुपये घेऊन, त्याच दिवशीं दोन प्रहरीं दरसाल दरशेंकडा सात रुपये दरानें पूर्वीचे दुप्पट रुपये घेतले; आणि आठ महिन्यानीं दोन्ही रकमांची १३५ रुपये रास आणून दिली, तेव्हां एकंदर मुद्दल किती? व प्रत्येक दराचें वेगवेगळालें किती?

रु. आ. पै.

उत्तर
- एकंदर मु० १२९ .. ८ .. ६
- ५ चे दराचें ४३ .. २ .. १०
- ७ चे दराचे ८६ .. ५ .. ८

व्यापारांत या सरळ व्याजाचे व्याज कटाव,+ आणि व्याज फैलाव, असे दोन भेद आहेत, यांचे करण्याची रीति, खालीं अ आणि ब यांचे हिशोब ककडून झालेले लिहिले आहे त्यांवरून कळेल.

हिशोब (अ) गृहस्थाकडे (क) सावकाराचे रुपये येणें त्याबाबद इस्तकबिल कार्तिक शुद्ध १ शाके १७७९

जमा	रुपये.	खर्च	रुपये.
२८०	पौष वद्य १ शाके मजकूर गु० खुद्द रोख कंपनी.	८००	कार्तिक शुद्ध १ शाके मजकूर रोख कंपनी.
४६०	फाल्गुन शुद्ध ७ शाके मजकूर गु० खुद्द रोख कंपनी.	२०२	चैत्र शुद्ध ८ शाके १७८० गुजारत खुद्द हुंडी मुंबईस (ड) सावकारावर घेतली त्याबाबद कंपनी रुपये.
९९	आषाढ शुद्ध १२ शाके १७८० गु० खुद्द हुंडी मुंबईचे सावकारावरील रु० १००ची विकत दिली व्याज बाबद दरसद्दे ९९ प्रमाः	२००	ऐन हुंडी मुंबईस पाठविली.

+ व्याज कटाव व व्याज फैलाव या शब्दांचा उपयोग. जेथें रकमा दोन चार वेळां नेल्या व परत केल्या असतील, तेथें करितात. ह्मणजे पहिल्यानें एक रकम नेऊन, पुढें दोन चार महिन्यानीं कांहीं रुपये परत केले व बाकी राहिलेले पुढें कांहीं महिन्यांनीं दिले या प्रमाणें, पहिल्यानें जी रकम नेली, तिचें त्या मिती पासून पहिल्यानें जी रकम परत केली, त्या मिती पर्यंत व्याज करून मुद्दलांतून ती रकम तें व्याज वजा करून पुढें असेंच करीत जाणें या रीतीस व्याज कटाव ह्मणतात. जी रकम पहिल्यानें नेली तिचें त्या मितीपासून जी रकम शेवटीं मुद्दल फेडण्यास दिली त्या मिती पर्यंत व्याज आकारून त्यांतून ज्या रकमा परत केल्या, असतील त्यांचें त्या त्या मितीपासून शेवटच्या मिती पर्यंत व्याज आकारून तें व्याज पूर्व व्याजांतून वजा देऊन, जी बाकी राहील तें व्याज समजणें यास व्याज फैलाव ह्मणतात.

१० भाद्रपद शुद्ध १ शाके मजकूर गु॰
खुद्द रोख कंपनी.
६७॥=॥ अश्विन शुद्ध १ शाके मजकूर
गु॰ खुद्द रोख वगैरे कंपनी.
२२ रोख.
४५॥=॥ सोन्याचें जोडवें वज-
न तोळे ४॥।१, दर १५ प्र॰
६७॥=॥.
२८ अश्विन वद्य २ शाके मजकूर गु॰
खुद्द रोख कंपनी.
१०५॥।=॥.
बाकी येणें.
२०६=॥ ऐन मुद्दल.
१६॥=॥ व्याज.
२२४=.

७ सदरहू बाबद हुंडणावळ
दर शें कडा १। प्र॰
२०
८० ज्येष्ठ वद्य १ शाके मजकूर गु॰ खुद्द
(व) कड येणें त्याचा हवाला घेत
ला ते त्याचे जमा करून नावें रु॰ कंप॰
२६७॥ श्रावण शुद्ध ११ शाके मजकूर गु॰
खुद्द रोख वगैरे रु॰ कंपनी.
२२० रोख. १७॥ सोनें तोळा १
८२६७॥
२१॥= भाद्र॰ शु॰ १२ गु॰ खु॰ चांदीव
जन भार ५० एकूण दर भारास
वर्ताळा ७। प्रमाणें
१०७२८=
१६॥=॥ व्याज इस्त॰ मिति कार्तिक शु॰ १
शाके १७७९ ता॰ मा॰ अश्विन वद्य २०
शाके १७८० पर्यंत नावें कडील
कच्चे १९०१॥। पैकीं जमे कडील
कच्चे २०८ व॰ क॰ बा॰ १६९४॥।
दर सदे एकोत्रा प्रमाणें आकार
रुजुवातीनें ठरला ते कंपनी.
१०८९७।.

व्यांज आकार (अ) गृहस्थाचें (क) सावकाराकडे खातें चालल्याबा
बद इसक बिल कार्तिक शु० १ श० १७७९

जमा — रुपये.

० रकम रुपये ३२० पौषवद्य १
२३४। र० रुपये ४६० फाल्गुन शु० ७
० रकम २५०
२०४। र० रुपये २०३ माहे १७
२३ रकम ७ माहे ३८९
२३४।.

२४. र० ९९ आषाढ शु० १२ श० १७८०
० रकम ४२
२४. बाकी रकम रुपये ५६ माहे ६२८
२४.

० र० १५० भाद्रपद शु० ६ १
० र० ६७॥।॥ आश्विन शु० १
० रकम ६॥.
० बाकी ४४॥.
०

० र० ३२ आश्विनवद्य २
२८२

बाकी येणें कर्ज.
१६०४॥.

खर्च — रुपये.

१६७५ रकम ३०० कार्तिक शु० १
६५५ रकम ३२० माहे २०१२
१०२० बाकी रु० ३२० माहे ४८६
१६७२

० रकम २०३ चैत्र शु० ८ शके १७८०
३७॥. रकम ८० ज्येष्ठवद्य १
० रकम ७
३७॥. बाकी ४२ माहे ६२७
३७॥.

२०४। रकम २६७॥ श्रावण शु० ११
० रकम ५६
१०० र० १२० माहे ६२०
१०४। बाकी ६१॥ माहे १६२०
२०४।.

६४। र० ७॥ भाद्र० श० १२
४ र० ४४॥ माहे ७१८
२४ र० ३२ माहे १०८
९४. बाकी २० ८॥ तागाइतआ
श्विनव० २ श० १७८० माहे १७८
६४।.

एकोत्रा प्रमाणें आकार. ———— १९८१॥।.

१५॥।॥.

———— तेरीज.

२०६॥. बाकी येणें ऐन मुद्दल.

१५॥।॥. व्याज इस्तकबिल मिति कार्तिक शु० १ शके १७७९ तागाइत अश्विन वद्य ३० शके १७८० पर्यंत एकंदर खात्याचे नावें कडील कच्चे १९८१॥। पैकीं जमे कडील कच्चे ७८८ मजा करून बाकी येणें कच्चे ११९५॥. एकुण दर सद्दे एकोत्रा प्रमाणें आकार.

३७८=

हिशेब (ब) गृहस्थाकडे (क) सावकाराचे रुपये येणें त्या बाबद इस्तकबिल कार्तिक शुद्द १ शके १७७९.

जमा ———— रुपये.	खर्च ———— रुपये.
५० मार्गशीर्ष वद्य १ शके मजकूर गु० खुद्द रोख कंपनी.	८०० कार्तिक शु० १ श० १७७९ गु० खु० रोख कंपनी. याशीं व्याज दरम हा दरसद्दे एकोत्रा प्रमाणें करार
७५ पौष शु० १ शके मजकूर गु० खुद्द रोख कंपनी.	७०॥ अश्विन शु० ११ श० १७८० गु० खुद्द व्याजर० रु० ८०० बाबद इस्तकबिल मिति कार्तिक शु० १ श० १७७९ तागाइत आज पर्यंत रुजवाती नें ठरले ते.
५८ माघ वद्य १ शके मजकूर गु० (ब) याणें तुह्मांपैकीं (न) या ज बरोबर पाठविले ते रोख कंपनी बद्दल पावती दिली असे.	७९ र० ८० माहे १७१८
३५ फाल्गुन शु० १ शके मजकूर गु० (ल) रोख कंपनी.	१२० र० ७५ माहे २

६८ चैत्रवद्य १ श. १७८० गु० खु० रो० सकं० ८७॥ र० २५ माहे ३ ॥२

८० वैशाख शु० १ गु० खु० रो० कंपनी. १४० र० ३८ माहे ४

८० ज्येष्ठ वद्य १ गु० खुद्द हवालाना ३४७॥ र० ६८ माहे ८ ॥२

वें (अ) रु० कंपनी. ३०० र० ८० माहे ६

८८ श्रावण वद्य १ गु० खुद्द रो० कंपनी ३७८ र० ८० माहे ७ ॥२

१७॥ अश्विन शु० ११ गु० खु० रो० कंप० २३७॥ र० ८८ माहे ८ ॥२

८७५॥. १४१५॥ बाकी १८८ माहे ११ ॥० तप

बाकीयेणें रुपये. शिलवार

॥।२. ३१३५.

७ दर एकोणा प्रमाणें.

८३॥२.

चक्रवाढव्याज

चक्रवाढ व्याज ह्मणजे प्रथम मुदतीस नेमले दरानें व्याज करून पुढें व्याज सहित मुदलाचे पुनः पुनः व्याज करितात तें.

रीति.

प्रथम. एके मुदतीस नेमले दरानें व्याज करून, तें मुदलांत मिळवून, दुसरे मुदतीस नेमले दरानें या व्याज मुद्दल रासीचें व्याज करून, तें त्या रासींत मिळवून, पुनः व्याज करावें. या प्रमाणें शेवट मुदती पर्यंत करावें.

दुसरी. सांगितलेला व्याजाचा दर आपले मुदलाचा जितके वा हिसा असेल, तितकां हिसा सांगितले मुदलाचा त्यांत मिळवून, पुनः त्या रासीचा तितकाच हिसा त्यांत मिळवावा. या प्रमाणें मुदती संख्या वेळां करावें.

उदाहरणें.

(१) मुद्दल ७२०रु॰ यांस व्याज दर साल दर शेंकडा ५रु॰ २वर्षांची रास काय हो

मुद्दलरु॰		सु॰रु॰		व्या॰रु॰		व्या॰रु॰
१००	:	७२०	::	५	:	३६
						७२० सु॰
						७५६ रा.
१००	:	७५६	::	५	:	३७॥१२॥०
						७९३॥१२॥०
१००	:	७९३॥१२॥०	::	५	:	३९॥११॥।
प्रथमरीतीने				रास उत्तर		८३३॥७॥११।

(२) दर साल दर शेंकडा ४रुपये व्याजाचे दरानें ४३२ रुपये मुद्दलाची २वर्षांची रास किती होईल. आतां ४रु॰ हे आपल्या मुद्दलाचा २५वा हिस्सा आहेत, याजकरितां

```
२५) ४३२
    १७८४८६
२५) ४४९८८६
    १७९७९९।
२५) ४६७८४९।
    १८९१९।
रा॰ हें उ. ४८५९२९
```

चवांचीरीति.

समाकार मोत्यांचें कांहीं मान पहाण्याची एक रीति आहे, तीस चवांची रीति ह्मणतात.

प्रथमरीति. रतीला[+] रतींनीं गुणावें; त्या गुणाकाराला ५५ यांणीं गुणून, ९६नीं भागावें; नंतर त्या भागाकाराला मोत्यांचे संख्येनें भागावें; जो भागाकार येईल तें चव होत.

दुसरीरीति. गुंजास गुंजांनीं गुणावें, त्या गुणाकाला १५९ यांनीं गुणून ५१२नीं भागावें; व त्या भागाकाराला मोत्यांचे संख्येनें भागावें; जो भागाकार येईल तें चव होतील.

+ गुंजेची ॥। रती धरिसात. आणि कित्येक ठिकाणीं गुंजेची ॥७॥ रती धरितात. या रीतींत १२३⁄४ ट॰ = १र॰ आणि २४र॰ = १टांक हा आधार असावा.

टीप. १चवाचे१०० दोकडे आणि१दोक॰चे१०० प्रतिदो॰ धरितात.

उदाहरण.

(१) ७ मोत्यांची पुरवणी ८गुंजा- वजन आहे, तिचे चव किती होतील?

```
८          च. दो. म.दो.
।।।॰     ७)२०..६२..५०
६          २..९४..६४ उत्तर.
६
३६
५५
९६)१९८०(२० बा.
च. २०   १००
   ९६)६०००(४८
   दो. ६२   १००
       ९६)४८००(०बा.
          म.दो.५०
```

(२) आठ मोत्यें ६ गुंजा वजन आहेत; त्याचे चव किती होतील?

```
६               च. दो. म.दो.
६            ८)११..६०..१५ ५/८
३६             उ.१..४५..२
१६५
५१२)५९४०(३०८ बा.
११चव  १००
५१२)३०८००(८०बा.
   दो. ६०   १००
   ५१२)८०००(३२०
      म.दो. १५  ५१२
```

सांकळरीति.

सांकळ रीती हा एक त्रैराशिकाचाच भाग आहे, यांतील पदें परस्पर कोणत्या ही प्रमाणानें येतात; व तीं सांकळीच्या कड्या प्रमाणें जोडलेलीं असतात, ह्मणून यास साकळ रीति ह्मणतात.

सांकळ रीतीनें उत्तर काढणें.

ज्या पदाची किंमत इच्छिली आहे त्या पदास इच्छोत्पादक पद ह्मणावें आणि तें उजवे कडे एके ओळींत मांडावें; नंतर त्या पदाचे जातीचें पद असेल तें त्याच्या खालीं दुसरे ओळींत डावे कडे मांडून त्याच्या शीं जें दुसरें विजातीय पद किमतीच्या बरोबर असेल तें उजवे कडे इच्छोत्पादकाचे खालीं मांडावें आणि त्यामध्यें = असें चिन्ह लिहावें. नंतर या पदाचे जातीचें जें दुसरें पद असेल तें पूर्वी मांडलें त्याडावे

कडच्या पदाखाली मांडून, त्याचाशीं किमतीनें बराबर असणारें भिन्नजातिपद पुढें मांडावें व या भिन्नजातिपदामध्यें वर सांगित त्याप्रमाणें चिन्ह लिहावें याप्रमाणें सर्व पदें मांडिल्यावर उजवे कडच्या सर्व पदांचा गुणाकार डावे कडील सर्व पदांचा गुणाकारानें भागावा; भागाकार येईल तें इच्छाफळ होईल; हें उजवे ओळींतील शेवटील पदाशीं सजातीय असतें.

उदाहरणें.

(१) १शेर साकर किमतीनें ८शेर काकवी बराबर; १शेर काकवी ४शेर मधा बराबर; आणि २शेर मधाची किंमत ५आणे; तर २० शेर साखरेची किंमत काय?

२० शेर इच्छो.
सा. शे. १ — ८ शे. का.
का. शे. १ — ४ शे. म.
म. शे. २ — ५ आ.

$$\frac{२०×८×४×५}{१×१×२} = \frac{३२००}{२५६}$$

आ. पै.
१२.. ६ हें उत्तर.

(२) कुत्र्याचीं ५पावलें लांबीनें ससाच्या ७पावलां बराबर. सशाचीं २४ पावलें हत्तीच्या ५पावलां बराबर. हत्तीचें १पावलाची लांबी २०इंच आहे. तर कुत्रा २५०० पावलें चालला असतां लांबी किती होईल?

उत्तर फ. या. फू. इं.
२.. १६७.. १.. ११.

बट्टा.

दोन जातीचे रुपयांत परस्पर बराबर होण्यास जो कमीपणा असतो त्यास बट्टा ह्मणावें. जसें हुकेरी रुपयांस फर्तीशीं दर शेंकडा चार रुपये बट्ट्याचा भाव आहे ह्मणजे शेंकडा चार रुपयानीं हुकेरी फर्तीहून कमी आहेत.

व्यवहारांत बट्ट्याचे, आंत बट्टा आणि बाहेर बट्टा असे दोन प्रकार आहेत.

रीति.

आंतबट्टा- बट्ट्याचा दर शंभरांत वजा करून या प्रमाणें प्रमाण मांडावें जसें १०० रु०, बटवावयांचे रुपयांस होतात; तसें १०० रु० उणा बट्ट्याचा दर, बटविले रुपयांस होईल.

वरबट्टा- बट्ट्याचा दर शंभरांत मिळवून प्रमाण मांडावें. जसें १०० रु० अधिक बट्ट्याचा दर, बटवावयाचे रुपयांस; तसे १०० रु०, बटविले रुपयांस होतील.

टीप. सावकार लोक आंत बट्ट्यानें रुपये देतात, व वर बट्ट्यानें घेतात, यांत फरक इतकाच कीं, बट्ट्याचे रुपयांचा बट्टा मिळतो.

उदाहरणें.

हुकेरीचा स्वर्तीशीं दर चोकडा २½ रुपये बट्ट्याचा भाव असतां, ११७ रुपये हुकेरीचे आंत बट्ट्यानें आणि वर बट्ट्यानें स्वर्ती कीती रुपये होतील?

आंत बट्ट्यानें

रु० रु० रु०
१०० : ११७ :: ९७॥
९७॥
१००) ११२०७॥ आ पै.
रु० ११२ .. १४ : ११

वर बट्ट्यानें.

रु० रु० रु०
१०२॥ : ११७ :: १००
१००
१०२॥) ११७०० आ. पै.
रु० ११३ .. ० .. ८

उत्तरें

प्रश्नसमुदाय सर्व पुस्तकाचे शेवटीं आहे.

समाप्त.

अनुक्रमणिका.

भाग २

विषय.	पृष्ठ
कार्यप्रकाशक चिन्हें.	१
व्यवहारी अपूर्णांक.	२
व्यवहारी अपूर्णांकाचा रूपभेद.	४
” ” ची मिळवणी.	१७
” ” वजाबाकी.	१८
” ” गुणाकार.	१९
” ” भागाकार.	१९
” ” त्रैराशिव पंचराशि.	२०
दशांश अपूर्णांक.	२२
” अपूर्णांकाची मिळवणी.	२३
” ” वजाबाकी.	२४
” ” गुणाकार.	२५
” ” भागाकार.	२८
” ” भांजणी.	३२
” ” त्रैराशिव पंचराशि.	३५
द्वादशांश.	३६
घातकर्म.	३८
मूळकर्म.	४०

विषय.	पृष्ठ
वर्गमूळ.	४०
घनमूळ.	४४
कोणतेंही मूळ.	४७
वर्ग, घन, आणि मूळें.	५०
उत्तर, गुणोत्तर, प्रमाण आणि श्रेढी.	५४
गणित श्रेढी.	५८
भूमिति श्रेढी.	६१
सर्कत.	६४
एकरी सर्कत.	६५
दुहेरी सर्कत.	६८
चक्रवाढव्याज.	६७
मिश्रगणित.	७०
मध्यमिश्रगणित.	७०
व्युत्क्रममिश्रगणित.	७१
इष्टराशी.	७५
एकेरी इष्टराशी.	७५
दुहेरी इष्टराशी.	७७

[illegible]

गणितसार.

अंकगणित.

भागदुसरा.

अपूर्णांक.

कार्यप्रकाशकचिन्हें.

अंकगणित आणि बीजगणित, यांमध्यें किती एक कामांचीं प्रकाशक ह्मणजे दाखविणारीं चिन्हें आहेत, तीं व त्यांचे उपयोग खालीं लिहितों.

चिन्हें	उपयोग.
+ हें चिन्ह अधिक करण्याचें ह्मणजे मिळवणीचें हें धन चिन्ह.	जसें ५+२ अथवा अ+ब
− हें चिन्ह उणे करण्याचें ह्मणजे वजा करण्याचें हें ऋण चिन्ह.	७−२ अथवा ब−क.
×, · हीं चिन्हें गुणण्याचीं	४×३ अथ॰ अ×क, अ॰ ब·ड
÷ हें चिन्ह भागण्याचें.	१४÷७ अथवा म÷स
= हें चिन्ह बरोबरीचें.	५=३+२ अथ॰ क=ब+ड
: :: : हें चिन्ह प्रमाण अथवा राशी गणित करण्याचें.	७:१४::३:६ अ॰ अ:ब::क:ड
( ) कौंस, $\overline{\text{सांकळी}}$, हीं चिन्हें अनेक वियुक्त पदांचें एक पद दाखवितात	३(४+५) अथ॰ अ(ब+ड) ३·$\overline{४+५}$ अथ॰ अ·$\overline{ब+ड}$
$५^{३*}$, $७^{२}$, $९^{न}$ हीं चिन्हें घात प्रकाशक,	$११^{२}$, $८^{३}$ अथवा $अ^{२}$, $ब^{३}$

* घातप्रकाशक किंवा घातमूळ प्रकाशक मूळ अंकापेक्षां बारीक लिहावे.

खालील संख्येचा कितीं घात करावा $\overline{३१२-२}^{३}$ अथवा $\overline{अ×ब-ड}^{न}$ तें दाखवितात.

$\sqrt{\ }$, $^{\frac{१}{२}}$ हीं चिन्हें वर्गमूळ करण्याचीं. $\sqrt{७}$, $७^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{अ}$, $अ^{\frac{१}{२}}$

$\sqrt[३]{\ }$, $^{\frac{१}{३}}$ हीं चिन्हें घन मूळ करण्याचीं. $\sqrt[३]{९}$, $९^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{क्ष}$, $क्ष^{\frac{१}{३}}$

$\sqrt[न]{\ }$, $^{\frac{१}{न}}$ हीं चिन्हें नचे संख्ये इतकें मूळ $\sqrt[न]{५}$, $५^{\frac{१}{न}}$ अथवा $\sqrt[न]{भ}$, $म^{\frac{१}{न}}$ दाखवितात.

∴ हें चिन्ह ह्मणजे किंवा ह्मणून या शब्दाचें वाचक आहे.

व्यवहारी अपूर्णांक.

व्याख्या.

१ कोण तीं एक वस्तु किंवा संख्या पूर्ण अथवा अखंड मानून, तिचे कितीही खंड केले तरी, त्या खंड सूचकांस अपूर्णांक ह्मणतात. जसें एक पूर्ण वस्तूचे नऊ सारखे भाग केले; आणि त्या भागांतून २,५,७ इत्यादि भाग घेतले, त्या भागांस अपूर्णांक ह्मणतात. ते लिहिण्याची रीति, $\frac{२}{९}$, $\frac{५}{९}$, $\frac{७}{९}$ इ. रेघेचा खालचा अंगास जी संख्या आहे, तिला छेद ह्मणतात; कारण मूळ वस्तु किती भागांनीं विभागिली, ती ते दाखवितात. रेघेचा वरचा अंगास जी संख्या आहे, तिला अंश ह्मणतात; कारण मूळ वस्तूचा अपूर्णपणा दाखवाया साठीं त्या केलेल्या भागांतून किती भाग घेतले, हें ती संख्या दाखविते.

२ अपूर्णांका मध्यें जाचे छेद निरंतर दशकावर चालतात, त्याला दशांश अपूर्णांक ह्मणतात, व त्याचा भेद राहाण्यासाठीं याला व्यवहारी अपूर्णांक

असें नाव दिलें आहे.

३ व्यवहारी अपूर्णांकाच्या सहा जाती आहेत; सम, विषम, भागजाति, प्रभागजाति, भागानुबंध आणि मिश्र.

४ सम अपूर्णांक ह्मणजे ज्याचे अंश छेदाहून उणे. जसें ४/९, १३/१६ इत्यादि.

५ विषम अपूर्णांक ह्मणजे ज्याचे अंश छेदाहून अधिक+. जसें ९/२, १३/७ इ०

६ अंश छेदाहून उणें, अधिक, किंवा बरोबर असोत; केवळ अंश छेदात्मक पद असलें ह्मणजे त्यास भागजाति अपूर्णांक ह्मणावें. जसें ५/७, ७/८ इ०

७ जे अपूर्णांकाचे अपूर्णांक अथवा भागाचे भाग आहेत, त्यांस प्रभागजाति अपूर्णांक ह्मणावें. हे प्रभागजाति अपूर्णांक मध्यें चा किंवा चे घालून लिहावे, जसें २/३ चे ३/७ अथवा ५ चे ६/७ चा २/९ इत्यादि.

८ पूर्णांक लिहून जवळच अपूर्णांक लिहितात त्याला भागानुबंध पूर्णांक ह्मणावें.‡ जसें ५ ३/७ अथवा २ ३/४ इ०

९ ज्याचे अंश आणि छेद दोनही सम, विषम अथवा भागानुबंध आहेत, त्यांस मिश्र अपूर्णांक ह्मणावें. जसें [illegible] इत्यादि.

१० कोणत्याही पूर्णांकास छेदस्थानीं एक लिहिल्यानें त्याचें पूर्णांकत्व न मोडतां अपूर्णांकाचें रूप होतें जसें ४ या पूर्णांकाचे ४/१ हे अपूर्णांक आहेत.

११ कोणताही अपूर्णांक भागाकार दाखवितो, ह्मणजे अंशास छेदानें भागून जो भागाकार उत्पन्न होतो, त्याचे बरोबर त्या अपूर्णांकाची किंमत आहे.

+ साधारण रीतीनें विचार केला असतां, अपूर्णांकाची मर्यादा एक पूर्णांक आहे; याजकरितां अपूर्णांकाचे अंशास त्या वाढवीत असतां, जेथें छेदाबरोबर आली, तेथें अपूर्णांकत्व गेलें, ह्मणून मर्यादेचे आंतले सम अपूर्णांक आणि बाहेरले विषम अपूर्णांक होत.

‡ पूर्णांकाच्या अनुलक्षेकरून (मागून) अपूर्णांक येतात; ह्मणून त्याला भागानुबंध पूर्णांक ह्मणावें.

जसें $\frac{१६}{४}$ या अपूर्णांकाची किंमत चार आहे.

व्यवहारीअपूर्णांकाचारूपभेद.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा रूप भेद ह्मणजे किंमत तीच ठेवून, रूपाचा बद्लकरणें हा रूप भेद अपूर्णांकाची मिळवणी, वजाबाकी इ॰ करायासाठीं याचा लागतो. त्याचे किती एकप्रकार आहेत.

कृत्य.

दृढभाजककाढायाचें.

*दृढ भाजक ह्मणजे अनेक रकमा आहेत, त्याजा अंकानें निःशेष भागिल्या जातात तो अंक होय. जापेक्षां दुसरा मोठा अंक निःशेष भागणारा असत नाहीं.

रीति.

(१) जर दोन संख्या असतील, तर मोठ्या संख्येला लहान संख्येनें भागावें, बाकी राहील तिनें पूर्व भाजकास भागावें; या प्रमाणें भागितां शेवटील भाज्य जा भाजकानें निःशेष भागिला जाईल, तो दृढ भाजक होय.

(२) जर संख्या दोहोंहून अधिक असतील तर, पूर्वी प्रमाणें दोन संख्याचा दृढ भाजक काढून, तो दृढ भाजक व तिसरी संख्या यांचा दृढ भाजक काढावा, या प्रमाणें जितक्या संख्या असतील, त्यांचा दृढ भाजक काढावा; ह्मणजे शेवटील भाजक सर्व संख्यांचा दृढ भाजक होईल.

जर अशा रीतीनें एकावांचून दुसरा दृढ भाजक निघत नाहीं, तर अशा संख्या †अविभाज्य होत.

---

* एथें दृढ शब्दाचा अर्थ मोठा घ्यावयाचा

† अविभाज्य संख्या ह्मणजे जांला एकावांचून दुसरा भाजक निःशेष भागित नाहीं; जसें

दृढ भाजकाची उपपत्ति.

नियम.

(१) जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिते तेव्हां त्या संख्येस दुसरे संख्येचा भाजक ह्मणावें.

(२) जेव्हां एक संख्या दुसऱ्या दोन किंवा अधिक संख्यांस निःशेष भागिते तेव्हां ती संख्या त्या दुसऱ्ये संख्येचा साधारण भाजक आहे. असें ६ ही संख्या १८,४८,१३८,२०६ यांचा साधारण भाजक आहे. कोणत्या ही संख्यांस अनेक साधारण भाजक असतात जसें वरच्या संख्यांस २,३,६ हे साधारण भाजक आहेत.

अनेक साधारण भाजकांतून जो सर्वांहून मोठा असतो त्यास दृढभाजक ह्मणावें.

२,३,५,७,११,१३,१७ इत्यादि. या संख्यांचा शोध पूर्वकाळापासून चालत आहे, आणि अशा संख्या जाणायासाठीं एक चांगली रीति आजचा दिवशीं अपेक्षित आहे.

(इरातास्थेनीस्) या नामे एक मोठा ज्योतिषी मिश्रदेशांत होता, त्यानें या अपेक्षितासाठीं एक युक्ती काढिली. जीस चलनी असें नाव ठेविलें आहे; काकीं त्या युक्तीनें अविभाज्य संख्या इतर संख्यांहून निराळ्या करितां येतात.

एकापासून कोणते ही इच्छिले संख्ये पावेतों सर्व विषम संख्या अनुक्रमानें लिही जसें १,३,५,७,९,११,१३,१५,१७,१९,२१,२३,२५,२७,२९,३१,३३,३५,३७,३९,४१, ४३,४५,४७,४९,५१,५३,५५,५७,५९,६१,६३,६५,६७,६९,७१,७३,७५,७७,७९, ८१,८३,८५,८७,८९,९१,९३,९५,९७,९९.

प्रथम तीन या अविभाज्य संख्ये पासून आरंभ करून तिसऱ्या तिसऱ्या संख्येवर बिंदू कर, या संख्या तिहींनीं निःशेष भागिल्या जातात. नंतर पांचापासून पांचवे पांचवे स्थानीं बिंदू कर, या संख्या पांचांनीं निःशेष भागिल्या जातात. पुनः सातांपासून आरंभ करून, सातवे सातवे स्थानीं बिंदू कर, त्या संख्या सातांनीं निःशेष भागिल्या जातात. असें केलें असतां ज्या संख्यांवर बिंदू नाहींत; त्या संख्या अविभाज्य जाणाव्या.

सर्व सम संख्यांमध्यें दोन ही संख्या मात्र अविभाज्य आहे.

(३) जर एक संख्या दोन संख्यांस भागिते, तर ती त्यांची बेरीज, वजावाकी, आणि त्यासंख्यांस कोणते ही संख्येनें गुणिलेले गुणाकार यांस ही भागील. जसें ६ ही संख्या २४ आणि ४८ यांस भागिते तरती ७४, १२, ७२, २६ यांस ही भागील.

(४) जर एक संख्या दुसऱ्या एके संख्येस भागिते तर जितक्या संख्यांस ही दुसरी संख्या भागिते तितक्या संख्यास ती प्रथम संख्या भागील. जसें ६, १८ या संख्येस भागितात. आणि १८, ३६, ५४, ७२, ९० यांस भागितात तर ६ हे ३६, ५४, ७२, ९० यांस ही भागितील.

(५) जी संख्या भाज्य आणि भाजक यांस भागिते ती त्याचे बाकीस ही भागील, यास्तव भाज्य आणि भाजक यांचा जो साधारण भाजक तोच भाजक आणि बाकी यांचा ही आहे. आणि याचे उलट भाजक आणि बाकी यांचा जो साधारण भाजक तोच भाज्य आणि भाजक यांचा ही आहे. जसें भाज्य २६६ भाजक ११४ यांचा भागाकार २ आणि बाकी २४ यांत साधारण भाजक ६ आहे, ह्मणजे ६ हे २६६ आणि ११४ यांस भागितात तर तेच ११४ आणि २४ यांस ही भागितील, यावरून दृढ भाजक काढण्याची रीति खालीं लिहिल्या प्रमाणें.

२६६ भागिले ११४ यापासून बाकी २४	२४ भा० १८ या पा० बाकी ६
११४ भागिले २४ यापासून बाकी १८	१८ भा० ६ या पा० बा० राहात नाहीं.

आतां ६ हे ६ आणि १८ यांस निःशेष भागितात; यास्तव ६ आणि १८ यांचा दृढ भाजक ६ आहे, कारण सहा यांस ६ हून दुसरी कोणती ही मोठी संख्या निःशेष भागूं शकत नाहीं. जरी १८ चा ६ हून दुसरा मोठा भाजक आहे, तरी तो ६ आणि १८ यांचा साधारण भाजक नाहीं. त-

सें ५वे नियमा प्रमाणें ६ आणि १८ यांचा जो दृढ भाजक तोच १८ आणि २४ यांचा आहे, आणि १८ आणि २४ यांचा जो दृढ भाजक तोच २४ आणि ११४ यांचा आहे, आणि २४ आणि ११४ यांचा जो दृढ भाजक तोच ११४ आणि ३६६ यांचा आहे; ह्मणून ३६६ आणि ११४ यांचा दृढ भाजक ६ आहे हें सिद्ध.

उदाहरणें.

(१) ४४१ आणि १०५ यां संख्यांचा दृढ भाजक काढ.

```
१०५) ४४१ ( ४
     ४२०
     ----
      २१) १०५ ( ५

२१ दृढ भा० हें उत्तर.
```

(२) ६१२, ९३२ आणि ३२२ यां संख्यांचा दृढ भाजक काढ.

```
६१२) ९३२ ( १
     ६१२
     ----
     ३२०) ६१२ ( १
          ३२०
          ----
          २९२) ३२० ( १
               २९२
               ----
                २८) २९२ ( १०
                    २८०
                    ----
                     १२) २८ ( २
                         २४
                         --
                      प्र.दृ. ४) १२ ( ३
                                 १२
पुनः
४) ३२२ ( ८०
   ३२०
   ---
    २) ४ ) २
       ४

२ दृढ भाजक हें उत्तर.
```

प्रथमप्रकार.

अपूर्णांकाचा अति संक्षेप करावयाचा.

प्रथमरीति.— अंश छेदांस त्यांचे दृढ भाजकानें भागावें ह्मणजे संक्षेप झाला.

दुसरीरीति.— सांगितले अपूर्णांकाचे अंश छेदांस कोणतेंही संख्येनें भागावें, असें कीं, जिनें ते निःशेष भागिले जातील, मग जे भागाकार येतील, त्यांस तशाच रीतीनें दुसरे संख्येनें भागावें. या प्रमाणें जोंपर्यंत एका वांचून कोणत्याही संख्येनें अंश छेदांस निःशेष भागतां येणार नाहीं, तोंपर्यंत भागावें; हा शेवटील भागाकार सांगितले अपूर्णांकाचा संक्षेप झाला.

उदाहरणें.

(१) $\frac{३४८}{४२६}$ यांचा अतिसंक्षेप काय होतो? यांचा दृढ भाजक ६ आहे, त्यानें अंश छेदांस भागून $\frac{५८}{७१}$ संक्षेप हें उत्तर.

(२) $\frac{१५६}{२३४}$ यांचा अतिसंक्षेप काय होतो? $\frac{१५६}{२३४} = \frac{१२}{१८} = \frac{४}{६} = \frac{२}{३}$ संक्षेप हें उत्तर.

दुसरा प्रकार.

भागानुबंध पूर्णांकास बरोबर भावाचें विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.

+पूर्णांकास अपूर्णांकाचे छेदांनीं गुणून त्यांत अंश मिळवावे; आणि त्या खालीं ते छेद लिहावे. म्हणजे इच्छिलें रूप झालें.

उदाहरणें.

(१) २७ $\frac{२}{५}$ या भागानुबंध पूर्णांकास विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

२७ अथवा $\frac{(२७ \times ५) + २}{५} = \frac{१३७}{५}$

$$\begin{array}{r} २७ \\ \underline{५} \\ १३५ \\ \underline{२} \\ १३७ \\ \hline ५ \end{array}$$

(२) ६२ $\frac{३}{७}$, ४०१ $\frac{५}{१२}$ आणि ७१५ $\frac{१}{२}$ या भागानुबंध पूर्णांकांस विषम अपूर्णांकाचें रूप दे.

उत्तर $\frac{४३७}{७}$, $\frac{४८१७}{१२}$, $\frac{४७२१}{२}$

तिसरा प्रकार.

विषम अपूर्णांकास बरोबर भावाचें पूर्णांकाचें अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा

+ उघड आहे कीं, अपूर्णांकाचे छेदानीं पूर्णांक गुणिले असतां तो गुणाकार त्या अंशांशीं सजातीय होतो, या करितां कोणत्याही अवयवीस भलत्या संख्येनें गुणिलें आणि तो गुणाकार त्या संख्येनें भागिला असतां किमतींत बदल होत नाहीं. कोणता ही अपूर्णांक हेंच दाखविती कीं, अंशास छेदांनीं भागावें

रीति.

* अंशांस छेदांनीं भागावें भागाकार येईल, तो इच्छिला पूर्णांक अथवा भागानुबंध पूर्णांक होईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{४१२}{१७}$ या विषम अपूर्णांकास बरोबर भावाचें पूर्णांकाचें अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप दे.

$४१२ \div १७ = २४\frac{४}{१७}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{६४३२}{८}$, $\frac{३२१७}{२८}$ आणि $\frac{१२५}{६८}$ या विषम अपूर्णांकास बराबर भावाचें पूर्णांकाचें अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप दे. उत्तर, ८०४, $११४\frac{७}{२८}$, $१\frac{५७}{६८}$

चवथा प्रकार.

पूर्णांकास बरोबर भावाचें अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचें, ज्यांचे छेद सांगितलेल्या संख्येबरोबर होतील.

रीति.

\+ पूर्णांकास सांगितले छेदांनीं गुणून त्या गुणाकारा खालीं सांगितला छेद लिहावा ह्मणजे इच्छिलें अपूर्णांकाचें रूप झालें.

उदाहरणें.

(१) ८ या पूर्णांकास अपूर्णांकाचें रूप दे. ज्यांचे छेद ११ होतील.

$८ \times ११ = ८८$

उत्तर $\frac{८८}{११}$

(२) १३१, २६५, ९९२ या पूर्णांकांस अपूर्णांकाचें रूप दे. ज्यांचे छेद १७, ४५, १२ होतील.

उत्तर $\frac{२२२७}{१७}$, $\frac{११९२५}{४५}$, $\frac{११९०४}{१२}$

---

* ही रीति पूर्व रीतीचे उलट आहे; आणि हिचें कारण सरळ भागाकाराचें गुणापासून प्रकट आहे.

\+ एथें एकच अंकानें गुणाकार व भागाकार दर्शविले आहेत. ह्मणून पूर्णांकि मतींत फेर पडत नाहीं.

पांचवा प्रकार.

प्रभागजाति अपूर्णांकास भागजाति अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.

+ सर्व अंश परस्पर गुणून, तो गुणाकार अंश स्थळीं लिहावा, आणि सर्व छेद परस्पर गुणून तो गुणाकार छेद स्थळीं लिहावा, ह्मणजे इच्छिलें रूप झालें. त्यांत होईल तर अंश छेदांत संक्षेप करावा.

उदाहरणें.

(१) $\frac{३}{४}$ चे $\frac{५}{६}$ चा $\frac{१}{३}$ चे $\frac{८}{९}$ या प्रभागजाति अपूर्णांकास बरोबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

$\frac{३}{४} \times \frac{५}{६} \times \frac{१}{३} \times \frac{८}{९} = \frac{१२०}{६४८} = \frac{५}{२७}$ अ०

$\frac{३}{४} \times \frac{५}{६} \times \frac{१}{३} \times \frac{८}{९} = \frac{५}{२७}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{५}{७}$ चा $\frac{१}{३}$ चे $८\frac{५}{१२}$, $३\frac{७}{१२}$ चे $\frac{४}{७}$ चे $\frac{७}{६}$ आणि $\frac{५}{६}$ चे $\frac{३}{११}$ या प्रभागजाति अपूर्णांकास बरोबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकांचें रूप दे.

उत्तर $२\frac{१}{२५२}$, $२\frac{७}{१८}$, $\frac{५}{२२}$

सहावा प्रकार

विषमछेद अपूर्णांकास किंमत न बदलतां समछेद करावयाचा.

समछेद करण्यासाठीं अपूर्णांक रकमा भागजाति (सरळ अपूर्णांक)

+ या रीतीची सत्यता या प्रमाणें दाखविली जाते. सांगितले प्रभागजाति अपूर्णांक $\frac{४}{५}$ चे $\frac{३}{७}$ आहेत. आतां $\frac{४}{५}$ चा $\frac{१}{७}$ = $\frac{४}{५} \div ७ = \frac{४}{३५}$ याजकरितां $\frac{४}{५}$ चे $\frac{३}{७} = \frac{४}{३५} \times ३ = \frac{१२}{३५}$ ह्मणजे त्या अपूर्णांकाचे अंश, अंशांचा गुणाकारा बराबर आणि छेद छेदांचा गुणाकारा बराबर आहेत. जेव्हां प्रभागजाति अपूर्णांकांत दोहों पेक्षां अधिक अवयव असतील तेव्हां सर्व अंश परस्पर गुणावे तो गुणाकार अंश आणि सर्व छेद परस्पर गुणावे तो गुणाकार छेद होत. यांत होईल तर अंश छेदांत संक्षेप करावा.

असल्या पाहिजेत, तशा नसल्यास पूर्व प्रकाराप्रमाणें कराव्या.

रीति.

नवे अंश करितां प्रति अपूर्णांकाचे अंश त्याचे त्याचे छेद वांचून सर्व छेदांनीं गुणावे, ते गुणाकार अंश होत, आणि समछेद करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे. तो गुणाकार छेद होय.

उदाहरणें.

(१) $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$ यांस बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांकाचें रूप दे.

१×३×५ = १५ हा $\frac{१}{२}$चा नवा अंश
२×२×५ = २० हा $\frac{२}{३}$चा नवा अंश
४×२×३ = २४ हा $\frac{४}{५}$चा नवा अंश.
२×३×५ = ३० हा सर्वांचा समछेद

} $\frac{१५}{३०}$, $\frac{२०}{३०}$, $\frac{२४}{३०}$ हीं उत्तरें

(२) $\frac{५}{८}$चे २$\frac{१}{२}$, आणि ९$\frac{१}{२}$ यांचा समछेद कर. उत्तर $\frac{२५}{१६}$, $\frac{१५२}{१६}$

जर सर्व छेदांचा दृढ भाजक मिळेल तर त्यानें छेद भागून भागाकार त्याचे त्याचे खालीं मांडावे, नंतर प्रति रकमेचे अंश आणि छेद दोन ही त्या त्या छेदाचे भागाकार वांचून दुसऱ्या रकमा खालील भागाकारांनीं गुणावे गुणाकार येतील, ते इच्छिले समछेद होतील.

उदाहरणें.

(१) $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$ आणि $\frac{३}{८}$ यांस समछेद रूप दे. छेदांचा दृढ भाजक २ त्यांनीं छेद भागून $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{३}{८}$ (२, ३, ४) } $\frac{१२}{४८}$, $\frac{८}{४८}$, $\frac{१८}{४८}$ हें उ०

(२) $\frac{३}{३५}$, $\frac{५}{२८}$ आणि $\frac{७}{६३}$ यांस समछेद रूप दे. छेदांचा दृढ भाजक ७ आहे. उत्तर, $\frac{१०८}{१२६०}$, $\frac{२२५}{१२६०}$, $\frac{१४०}{१२६०}$

जर अंश आणि छेद यांचा साधारण दृढ भाजक असेल तर त्यांच्या त्या संख्यांचे स्थानीं त्यांचे गुण्य गुणक रूप अवयव+ मांडावे. आणि त्यांत

+ या गुण्य गुणक रूप केले अवयव प्रकट म्हणतात.

साधारण अवयव असतील ते रद्द करून पूर्व रीति प्रमाणें समछेद करावे.

उदाहरण.

(१) $\frac{४}{६}, \frac{८}{९}, \frac{१२}{५}$ यांस समछेद रूपदे.

$$\left.\begin{array}{l} ४×९×५ = २×२×३×३×५ = ३० \\ ८×६×५ = २×२×२×३×२×५ = ४० \\ १२×९×६ = २×२×३×३×३×३×२ = १०८ \\ \hline ६×९×५ = २×३×३×३×५ = ४५ \end{array}\right\} \frac{३०}{४५}, \frac{४०}{४५}, \frac{१०८}{४५} \text{ हे उ०}$$

लघुतम साधारण गुणाकार.

कोणत्या ही संख्यांचा साधारण गुणाकार ह्मणजे जा गुणाकारास त्या संख्यांनीं पृथक् पृथक् भागिलें असतां भागाकार निःशेष होतो तो. लघुतम साधारण गुणाकार हा फारच लहान साधारण गुणाकार आहे तो काढण्याची रीति.

सांगितल्या संख्या एके ओळींत लिहाव्या. जर त्यांतील दोन किंवा अधिक संख्या २ या अविभाज्य संख्येनें भागिल्या जातात तर भागून भागाकार त्याचे त्याचे खालीं दुसरे ओळीस लिहावे. आणि जा भागत नाहींत त्या तशाच दुसरे ओळीस लिहाव्या. पुनः या दुसरे ओळीस दोन यांणीं भागावें. या प्रमाणें भागितां दोहोंनीं भाग जात नाहीं तेव्हां ३ या अविभाज्य संख्येनें भागावें. तिहींनीं भाग जात नाहीं, तेव्हां ५, ७, ११ इत्यादि अविभाज्य संख्यांनीं अनुक्रमें भागित जावें. असें कीं, त्यांतील दोन संख्या भागिल्या वांचून रहात पर्यंत. नंतर सर्व भाजक व शेवटील ओळींतील बाकी अंक हे सर्व परस्पर गुणावे; जो गुणाकार येईल, तो लघुतम साधारण गुणाकार होईल.

उदाहरणें.

(१) ५, ८, ४०, ५५, ६४ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

२)	५,	८,	४०,	५५,	६४
२)	५	४	२०	५५	३२
२)	५	२	१०	५५	१६
५)	५	१	५	५५	८
	१	१	१	११	८

२×२×२×५×११×८=३५२०

हा इच्छिलेला लघुतम साधारण गुणाकार आहे.

(२) २५, १६५, २६१, ४९८ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

उत्तर, ८३५३१५०

(३) चार असामी एका मनुष्याकडे एकाच दिवशीं चाकरीस राहिले आणि चाकरी सोडून एकच दिवशीं गेले. त्या दिवशीं त्यांचे पगाराचे रुपये कमजास्त असून, रुपयांवरील खुर्दा बरोबर आला. तेव्हां त्यांणीं किती दिवस चाकरी केली? त्यांचे वेतनाचा करार प्रथमास ३ दिवसांस पांच रुपये, दुसऱ्यास ५ दिवसांस सात रुपये, तिसऱ्यास ७ दिवसांस ९ रुपये, चवथ्यास ९ दिवसांस ११ रुपये असा होता.

उत्तर ८६६ $\frac{1}{4}$ ✱ दिवस.

(४) तीन वाण्यांनीं आपले, सारखे बैल एकत्र करून पांच शहरीं सारखेच बैलांवर माल भरला. ७ वाटांनीं सारखे खाली आणिले आणि ९ शहरांत सारखे नेले, तेव्हां एकंदर बैल किती होते?

उत्तर ३१५ बैल.

अपूर्णांकाचा लघुतम साधारण गुणाकार.

✱ या प्रश्नाचीं उत्तरें साधारण गुणाकाराचा $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ इ० हिस्सा घेतला असतां अनेक निघतील.

सांगितले अपूर्णांकास अति संक्षेप समछेद रूप यावें, नंतर त्यानवे अंशांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढून त्या समछेदानें भागावें. भागाकार येईल, तो इच्छिला लघुतम साधारण गुणाकार होईल.

उदाहरणें.

(१) $५\frac{१}{४}$, $४\frac{१}{२}$ आणि $\frac{७}{८}$ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

$\frac{८४}{१६}$, $\frac{७२}{१६}$, $\frac{१४}{१६}$ हें अति संक्षेप समछेद रूप आहे. यांत ८४, ७२, १४ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार ५०४ यास १६ यांनीं भागून भागाकार.

उत्तर, $३१\frac{१}{२}$

(२) [illegible], [illegible], [illegible] आणि [illegible] यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

उत्तर, २४

लघुतम साधारण गुणाकार काढून समछेद.

सांगितल्या अपूर्णांकास संक्षेप रूप देऊन, छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढावा, नंतर त्या गुणाकारास वेगळाले छेदांनीं भागून त्या भागाकारास त्याचे त्याचे अंशांनीं गुणावें, नंतर त्या त्या गुणाकाराखालीं तो छेदांचा साधारण गुणाकार मांडावा म्हणजे लघुतम साधारण गुणाकार काढून समछेद झाले.

उदाहरणें.

(१) [illegible], [illegible], [illegible] यांस अति संक्षेप समछेद रूप दे.

छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार २८८ आहे हा छेद.

(२) $\frac{१}{१२}$, $\frac{३}{२७}$ आणि $\frac{८}{९}$ यांस अति संक्षेप समछेद रूप दे.

उत्तर $\frac{९}{१०८}$, $\frac{१२}{१०८}$, $\frac{९६}{१०८}$

$\frac{२८८}{३} \times २ = १९२$
$\frac{२८८}{३२} \times ५ = ४५$ } हे अंश.
$\frac{२८८}{३६} \times ७ = ५६$

उत्तर $\frac{१९२}{२८८}, \frac{४५}{२८८}, \frac{५६}{२८८}$

सातवा प्रकार.

मिश्र अपूर्णांकास शुद्ध अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.

अपूर्णांकाचे दोनही अवयवांस सरळ अपूर्णांकाचें रूप द्यावें; नंतर प्रत्येकाचे अंशास दुसऱ्याचे छेदानें गुणावें, म्हणजे शुद्ध अपूर्णांकाचें रूप झालें.

टीप. याची सिद्धता अपूर्णांकाचे भागाकारांत पहावी.

उदाहरणें.

(१) $\frac{५/२}{२/३}$, $\frac{४\frac{१}{२}}{३/४}$ या मिश्र अपूर्णांकांस शुद्ध अपूर्णांकांचें रूप दे.

$\frac{५}{२} \times \frac{३}{२} = \frac{१५}{४}$ आणि $\frac{९}{२} \times \frac{४}{३} = ६$ उत्तर.

(२) $\frac{५\frac{१}{३}}{२/३}$ या मिश्र अपूर्णांकास शुद्ध अपूर्णांकाचें रूप दे.

उत्तर ८

आठवा प्रकार.

कोणत्याही अपूर्णांकाचा भाव त्याचा पूर्णांक अवयवांत काढावयाचा.

रीति.

पूर्णांकांत जर अनेक भावाचे अवयव आहेत, तर त्यास विविध गुणाकाराचे रीतीनें अंशानें गुणून त्या गुणाकारास छेदानें भागावें बाकी राहिल्यास उतरते भांजणीचे रीतीनें त्याचे हलके अवयव क

रून छेदांनीं भागावें. भागाकार येईल तो हलके जातीचा पूर्णांक झाला.

उदाहरणें.

(१) २५ रुपये ३ आणे यांचे $\frac{४}{७}$ हे पूर्णांकांत किती किमतीचे आहेत?

रु०		आ०		
२५	..	३		
		४		
७)१००	..	१२		पै
१४	..	६	..	३ $\frac{३}{७}$ उत्तर.

(२) १७ बिघे ३ पांड १६ काठ्या यांचे $\frac{७}{११}$ हे पूर्णांकांत किती किमतीचे आहेत?

	बि०		पां०		का०
उत्तर	११	..	०	..	११

नववा प्रकार.

अपूर्णांकास बराबर किमतीचें हलकें किंवा भारी रूप द्यावयाचा.

रीति.

*हलके जातीचे अवयव त्यांचे वरचे भारी रूपाचे एकांत किती आहेत, तो विचार करावा; नंतर जर हलकें रूप द्यावयाचें आहे, तर अंशास त्या हलके जातीचे अवयवांनीं गुणावें; आणि भारी रूप द्यावयाचें आहे तर त्यांणीं छेदांस गुणावें.

उदाहरणें.

(१) १ रुपयाचे $\frac{३}{२८}$ यांस पैचें अपूर्णांक रूप दे.

$\frac{३}{२८} \times \frac{१६}{१} \times \frac{१२}{१} = \frac{१४४}{४७}$ पै उत्तर.

(२) १ हंड्रेडवेटचे $\frac{११}{३५}$ यांस ड्रामाचें रूप दे. उ० ९०११ $\frac{१}{५}$ ड्रा०

(३) वजनी एका शेराचे $\frac{१}{६}$ यांस खंडीचें रूप दे.

$\frac{१}{६} \times \frac{१}{४०} \times \frac{१}{२०} = \frac{१}{६००}$ खंडी हें उत्तर.

(४) २ $\frac{१}{५}$ फुटीचे $\frac{७}{११}$ यांस मैलाचें रूप दे. उत्तर $\frac{७}{२६४००}$ मैल.

---

*या रीतीचें पूर्णांकांतील भाजणीशीं सारूप्य आहे.

व्यवहारी अपूर्णांकाची मिळवणी.

रीति.

जर अपूर्णांक समछेद आहेत, तर सर्व अंश एकत्र मिळवून त्याचे खालीं समछेद लिहावा; ह्मणजे मिळवणी झाली.

जर अपूर्णांक समछेद नाहींत+ तर समछेद करून मिळवणी करावी; परंतु अपूर्णांक प्रभागजाति असल्यास भागजाति करावे; अनेकजातीचे असल्यास एकजातीचे करावे; भागानुबंध असल्यास विषम अपूर्णांक करावे; नंतर समछेद करून बेरीज घ्यावी. अथवा रकमा भागानुबंध असल्यास अपूर्णांकांची बेरीज घेऊन ती पूर्णांकांचे बेरजेस जोडून लिहावी.

+ जशी विजातीय पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी होत नाहीं ह्मणजे तीन रुपये आणि दोन पैसे यांची बेरीज ५रु॰ किंवा ५पैसे नाहीं. आणि वजाबाकी १रु॰ किंवा १पैसा नाहीं. तर बेरीज किंवा वजाबाकी होण्यास पदें सजातीय असलीं पाहिजेत. त्याप्रमाणेंच विषमछेद पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी होत नाहीं. याजकरितां त्यास समछेद केले ह्मणजे ते एके वस्तूचे सारखे तुकडे झाले. मग त्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी शक्य आहे.

भलते कोणते ही दोन अपूर्णांक घेतले, जसें $\frac{५}{९}$ आणि $\frac{२५}{४५}$ हे बरोबर भावांत आहेत, किंवा नाहींत हें त्यांस समछेद केल्यानंतर त्यांचे अंश पाहून प्रसिद्ध होतें. याजकरितां जर २५×९ आणि ५×४५ या प्रमाणें दोन बरोबर भावाचे गुणाकार होतात तर यां पासून बरोबर भावाचे दोन नवे अपूर्णांक उत्पन्न होतील, जसें $\frac{२५}{४५} = \frac{५}{९}$ अथवा $\frac{२५}{५} = \frac{४५}{९}$

तेव्हां जर बरोबर भावाचे दोन अपूर्णांक घेतले जसें $\frac{५}{९}$, $\frac{२५}{४५}$ तर २५×९ = ५×४५ या मध्यें कालून ५×९ हे वजा करून (२५−५)×९ = (४५−९)×५ याजकरितां हें अपूर्णांकरूप उत्पन्न होतें. $\frac{२५-५}{४५-९} = \frac{५}{९}$ अथवा $\frac{२०}{३६} = \frac{५}{९}$

या रीतीनें जर $\frac{५}{९}$ या अपूर्णांकाची पदें $\frac{२५}{४५}$ या अपूर्णांकाचे पदांशीं अनुक्रमें मिळविलीं तरी ही त्यास बरोबर भावाचें रूप होतें जसें $\frac{२५+५}{४५+९} = \frac{३०}{५४} = \frac{५}{९}$

अथवा सामान्यतः जर $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ तर या प्रमाणें दाखविलें जातें $\frac{अ \pm क}{ब \pm ड} = \frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$

उदाहरणें.

(१) $\frac{४}{५}$ आणि $\frac{७}{५}$ यांची बेरीज कर.

आतां $\frac{४}{५}+\frac{७}{५}=\frac{११}{५}=२\frac{१}{५}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{४}$ आणि $२\frac{१}{३}$ यांची बे०

$\frac{५}{६}+\frac{३}{४}+\frac{७}{३}=\frac{९०}{१०८}+\frac{८१}{१०८}+\frac{२५२}{१०८}=\frac{४२३}{१०८}=३\frac{३३}{३६}$ हें उत्तर.

(३) रुपयाचे $\frac{५}{१४}$ आणि आण्याचे $\frac{३}{५}$ यांची बेरीज कर.

$\frac{३}{५}\times\frac{१}{१६}=\frac{३}{८०}$ रु० $\frac{५}{१४}+\frac{३}{८०}=\frac{२००}{५६०}+\frac{२१}{५६०}=\frac{२२१}{५६०}$ रु० हें उ०

व्यवहारी अपूर्णांकाची वजाबाकी.

रीति.

जसे मिळवणी करावया करितां अपूर्णांक सजातीय व समछेद केले, तसे वजाबाकी करितां करावे; नंतर अधिक अंशांत थोडे अंश वजा करून बाकी राहील तिचा खालीं समछेद लिहावा. अथवा जी रकम वजा करावयाची तिचे अंश दुसऱ्या रकमेच्या अंशांतून वजा करावे, बाकी खालीं समछेद लिहावा. कदाचित् वजा करावयाची रकम मोठी असेल तर बाकी उणी राहील.

उदाहरणें.

(१) $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{२}{५}$ यांची वजाबाकी कर.

$\frac{३}{५}-\frac{२}{५}=\frac{१}{५}$ हें उत्तर.

(२) रुपयाचे $४\frac{२}{५}$ चे $\frac{३}{४}$ आणि पावल्याचे $\frac{५}{६}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर $२\frac{१३}{१५}$ रुपये.

याजकरितां जेव्हां बरोबर भावाचे दोन अपूर्णांक आहेत, तेव्हां दोहोंचे अंशांची बेरीज अथवा वजाबाकी अंश, आणि छेद दोहोंची बेरीज अ० वजाबाकी छेद यांपासून जे नवे दोन अपूर्णांक होतील ते त्या पूर्वी दोन अपूर्णांकांचे बरोबर भावाचे आहेत, हें प्रतिपाद्य बहुत उपयोगी आहे, असें पुढें प्रमाण रीतींत कळेल.

(३) ७ ११/१२ आणि ३/८ चे ३/४ यांचीव. उत्तर ७ १/३२

(४) कुडीचे ३/४ आणि पाडीचे ३/४ चे २/११ यांची वजावाकी. उत्तर ५८/२८७ पाडे.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा गुणाकार

रीति.

रकमा भागानुबंध असतील, त्यांस विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावें, नंतर गुणाकाराचे अंश करितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदांकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे; ह्मणजे गुणाकार होईल. यांत गुणाकार केल्यानंतर किंवा गुणाकार करण्या पूर्वी होईल तर अंश छेदांत संक्षेप करावा.

उदाहरणें.

(१) ४/७ यांस ९/१६ यांणीं गूण.
४/७ × ९/१६ = ९/२८ हें उत्तर.

(२) १ ३/४ चे ५/६ यांस ७/८ यांणीं गूण
= ५८/३५ = १ २३/३५ हें उ.

(३) खंडीचे ३/४ यांस ५/११ यांणीं गूण. उत्तर ५/११ खंडी.

(४) २५/२२ यांस ८ यांणीं गूण.
२००/२२ = १००/११ = ९ १/११ हें उत्तर.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा भागाकार.

रीति.

जसे वजाबाकी करितां समछेद करण्या पूर्वी अपूर्णांक तयार केले,

+अपूर्णांकास पूर्णांकानें गुणायाचें आहे तेव्हां सांगितले अपूर्णांकाचे छेद त्या पूर्णांकानें निःशेष भागतील तर भागून भागाकार छेदस्थानीं लिहावा ह्मणजे गुणाकार होईल. तसें न होईल, तर पूर्णांकानें अंश गुणावे; ह्मणजे गुणाकार होईल.

तसे भागाकार करितां करावे. भाज्य,भाजक अनेक जातीचे असल्यास एक जातीचे करावे, नंतर भाज्याचे अंश आणि छेद भाजकाचे अंश आणि छेद यांनीं अनुक्रमें निःशेष भागिले जातील, तर भागावे; आणि निःशेष भागिले नजात, तर भाजकाचे अंश छेद बदल करून त्याणीं भाज्यास गुणावें ह्मणजे भागाकार होईल

उदाहरणें.

(१) $\frac{४५}{३०}$ यांस $\frac{१५}{६}$ यांणीं भाग
$\frac{४५}{३०} \div \frac{१५}{६} = \frac{३}{५}$ हें उत्तर.

(२) खंडीचे $\frac{३}{४}$ यांस मणाचे [illegible] यांणीं भाग. उत्तर ४८ $\frac{८}{९}$

(३) २ $\frac{५}{९}$ यांस $\frac{७}{१२}$ यांणीं भाग
$\frac{२३}{९} \div \frac{७}{१२} = \frac{२३}{९_{३}} \times \frac{१२^{४}}{७} = \frac{९२}{२१} = ४\frac{८}{२१}$ उ०

(४) $\frac{५६}{३५०}$ यांस ८ यांणीं भाग.
$\frac{५६}{२८००} = \frac{७}{३५०} = \frac{१}{५०}$ हें उत्तर.

व्यवहारी अपूर्णांकाचें त्रैराशिक व पंचराशिक.

रीति.

+ या रीतीची सत्यता बीज रीतीनें दाखवितों; जसे $\frac{अ}{ब}$ हे भाज्य $\frac{क}{ड}$ यांनीं भागणें आहेत. आतां दुसरे प्रकाराचे टिपींत सांगितल्या प्रमाणें अपूर्णांकास हरएक संख्येनें गुणिलें आणि भागिलें असतां त्या पदांत फेरफार होत नाहीं याजकरितां $\frac{अ}{ब} = \frac{अ}{ब} \times \frac{क}{क} \times \frac{ड}{ड}$ आहे. यांस भाजकानें भागून $\frac{अ}{ब} \times \frac{क}{क} \times \frac{ड}{ड} \div \frac{क}{ड} = \frac{अ}{ब} \times \frac{१}{क} \times \frac{ड}{१} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ड}{क}$ हें रूप होतें. याजवरून अपूर्णांकाचे भागाकारांत भाजकाचे अंश आणि छेद बदलून भाज्यास गुणिलें असतां भागाकार होतो हें पर्यवसीत रूप आहे; परंतु भाजकाचे अंश आणि छेद यांनीं भाज्याचे अंश आणि छेद यांस भाग जात नाहीं, असे अपूर्णांकच नाहींत, असें ह्मणण्यास योग्य होईल. हें वरील रीती वरून स्पष्ट आहे.

१ अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागायाचें आहे तेव्हां त्या पूर्णांकानें अंश निःशेष भागतील तर भागावें. तसें न होईल तर छेद गुणावे ह्मणजे भागाकार झाला.

२ जेव्हां भाज्य आणि भाजक दोन्हीं समछेद आहेत तेव्हां भागाकाराचे अंश करितां भाज्याचे अंश आणि छेदा करितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

पूर्णांकांत त्रैराशिक व पंचराशिक यांची रीति सांगितली आहे त्याप्रमाणेंच. त्यांत व यांत भेद इतकाच कीं, पदें सरूप करणें गुणाकार, भागाकार करणें, तें सर्व अपूर्णांकाचे रीतीनें करावें.

उदाहरणें.

(१) जर १ बिघ्याचे $\frac{४}{९}$ यांस १ रुपयांचे $\frac{३}{५}$ पडतात, तर १ बिघ्याचे $\frac{११}{३२}$ यांस काय पडेल.

$$\text{बि॰} \quad \text{बि॰} \quad \text{रु॰} \quad \text{रु॰}$$

$$\frac{४}{९} : \frac{११}{३२} :: \frac{३}{५} : \frac{२९७}{६४०}$$

$\frac{११}{३२} \times \frac{३}{५} = \frac{३३}{१६०} \div \frac{४}{९} = \frac{३३}{१६०} \times \frac{९}{४} = \frac{२९७}{६४०}$ रुपये हें उत्तर.

(२) एक काठी तळ्यांत उभी केली तों ती $\frac{१}{३}$ चिखलांत गेली, $\frac{७}{१२}$ पाण्यांत बुडाली, आणि वरती ३ हात राहिली, यावरून ती काठी किती? व तळ्यांत चिखल व पाणी किती होतें तें सांग?

उत्तर, काठीची लांबी ३६ हा॰ चि॰ १२ हा॰ पाणी २१ हा॰

(३) एकाचे घरीं १५ घटिका दिवसास लग्न लागावयाचें होतें. कांहीं घटिका भरल्यावर यजमानानें जोत्यास विचारिलें, किती घटिका भरल्या तेव्हां त्याणें सांगितलें कीं, या वेळेपासून लग्न लागे पर्यंत ज्या घटिका भरावयाच्या आहेत, त्यांचे $\frac{४}{५}$ भरल्या यावरून लग्न लागावयास किती घटिकांचा अवकाश आहे? ।

उत्तर, ८ $\frac{१}{६}$ घटि॰ अवकाश.

(४) अ आणि ब यांजवळ कांहीं रुपये आहेत; जेव्हां ब आपले रुपयांचे $\frac{१}{४}$ अला देतो तेव्हां १५५ रुपयांची वस्तु घेण्यास असमर्थ होतो; परंतु ब जर आपले रुपयांचे $\frac{२}{३}$ देता तर १५५ रुपये १० आणे ८ पै

हून जास्त रुपयाची वस्तु अला घेववली नसती यावरून अ आणि ब यांजवळ मुळचे किती रुपये होते.

उत्तर अजवळ ८० रुपये आणि बजवळ १०० रुपये.

(५) कांहीं एक काम अ व ४ $\frac{४}{५}$ दिवसांत करितात तेंच काम अ क ५ $\frac{१}{३}$ दिवसांत करतात आणि ब क ६ $\frac{६}{७}$ दिवसांत करितात तर अ, ब, क मत्येकीं करूं लागले असतां किती किती दिवसांत करितील?

उत्तर अ ८ दिवसांत, ब १२ दि॰ आणि क १६ दि॰

दशांश अपूर्णांक.

दशांश अपूर्णांक ह्मणजे ज्याचे छेद दशकावर चालतात जसें १०, १००, १००० इत्यादि. याचा नेम असा आहे कीं, छेदांत जितकीं शून्यें एक या अंकावर आहेत तितकीं अंकस्थळें असतात. याचे लिहिण्याचा प्रकार असा आहे कीं, अंश लिहून त्याचे डावेकडे (॰) असा बिंदु द्यावा जसें— दशांश अपूर्णांक ॰३, ॰३५, ॰३४२, ॰००३

व्यवहारी अपूर्णांक $\frac{३}{१०}$, $\frac{३५}{१००}$, $\frac{३४२}{१०००}$, $\frac{३}{१०००}$

जर अंश एक अंकाचा आणि छेद १०० असेल, तर त्या अंशाचा डावेकडे एक शून्य देऊन मागें दशांश चिन्ह करावें; आणि छेद १००० असल्यास दोन शून्यें द्यावीं. यांत मागें इतकीं शून्यें द्यावीं कीं, अंशस्थळाची संख्या छेदांतील शून्या बरोबर होईल.

मिश्र दशांश संख्या तीच आहे, जींत पूर्णांक असून अपूर्णांक आहेत; आणि तिचा भेद मधील बिंदू करून स्पष्ट होतो जसें ४.२७ अथवा ४ $\frac{२७}{१००}$ अथवा $\frac{४२७}{१००}$ ही एकच आहे.

दशांशाच्चे उजवे बाजूस कितीही शून्यें दिलीं तरीं किंमतीत न्यूनाधिक होत नाहीं. ह्मणजे ·२, अ· ·२०, अ· ·२००, इ०; परंतु डावेकडे शून्यें दिलीं असतां त्याची किंमत उत्तरोत्तर दशगुण न्यून होते जसें ·२, ·०२, ·००२ इत्यादि.

जेव्हां दशांशांत एक किंवा अनेक अंक तेच तेच पुनः पुनः येतात तेव्हां त्यांस आवर्त दशांश ह्मणावें. ·२२२२२ इत्यादि = $\frac{२}{९}$ आणि ·४२८५७१४२८५७१ इत्यादि = $\frac{३}{७}$

जसें पूर्णांकांत तसें दशांश अपूर्णांकांत आहे कीं, उजवेकडील अंकाहून डावेकडील अंक उत्तरोत्तर दशगुण अधिक होतो आणि उजवेकडील तसा उणा होतो हें पुढील कोष्टकावरून समजेल

दशलक्ष	लक्ष	दशसहस्र	सहस्र	शत	दश	एक	दशांश	शतांश	सहस्रांश	दशसहस्रांश	लक्षांश	दशलक्षांश
५	५	५	५	५	५	५	५	५	५	५	५	५

दशांशमिळवणी.

पूर्णांकाच्चे मिळवणीप्रमाणें सर्व रकमा एकं खालीं एकं· दहं खालीं दहं· दशांशां खालीं दशांश· शतांशा खालीं शतांश येत, अशा मांडाव्या; नंतर दशांश चिन्ह नाहीं असें मनांत आणून साध्या मिळवणीप्रमाणें मिळवणी करावी· आणि ज्या रकमेंत सर्व रकमांपेक्षां दशांश स्थळें अधिक असतील, तीं तील तीं मोजून तितक्या स्थळांवर मिळवणींत उजवेकडून डावेकडे दशांश चिन्ह करावें· ह्मणजे चिन्हाचे डावेकडील पूर्णांक आणि उजवेकडील दशांश होत.

उदाहरणें.

(१)

१५२१·३४६८७९	
८५४·१५२२०७५	
१८३२१·६१९२	
२०६९७·११८२८६५	उत्तर

(२)

११५६·७२४३
१३९५३·२७७४६८६
५१०·८३३९६५
१६५२८·८३५७३३९६

दशांशवजाबाकी.

दोन्ही रकमांतील अंक मिळवणी प्रमाणें आपआपले स्थानीं लिहावे; नंतर पूर्णांक रीती प्रमाणें उजवे कडून आरंभ करून, वजाबाकी करावी, आणि मिळवणींत सांगितल्या प्रमाणें दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरणें.

(१)

६८२२·५३२	
१९३·१८४८	
६६२९·३४७	बाकी उ॰

(२)

८३४३०५·२३५	
१७६२३·५९४	
८१६६८१·६४१	हें उत्तर

दशांशगुणाकार.

✱ गुण्य, गुणक मांडून, साध्या गुणाकारा प्रमाणें गुणाकार करावा, नंतर गुण्य आणि गुणक यांतील दशांश स्थळें मोजून, तितके स्थळांवर गुणाकारांत उजवे कडून डावे कडे दशांश चिन्ह करावें. कदाचित् तितकीं स्थळें गुणाकारांत न भरतील, तर मागें शून्यें देऊन पुरी करावीं.

✱ या रीतीची सत्यता पुढील उदाहरणा पासून स्पष्ट होईल. ·१२ हे ·३६१ यानीं गुणायाचे आहेत व यासरख्या $\frac{१२}{१००}$ आणि $\frac{३६१}{१०००}$ याचे बरोबर आहेत, तर यांचा गुणाकार $\frac{४३३२}{१०००००}$ आहे; परंतु पूर्वी सांगितले दशांश लिहिण्याचे रीती

उदाहरणें

(१) ३४५·६३८५ हे गुण्य ९·७१ या गुणकानें गूण

```
   ३४५·६३८५
      ९·७१
  ----------
   ३४५६३८५
 २४१९४६९५
३११०७४६५
------------
३३५६·१४९८३५ गुणाकार.
```

(२) ·००६५२ हे गुण्य ·०६५२८ या गुणकानें गूण.

```
   ·००६५२
   ·०६५२८
  --------
     ५२१६
    १३०४
   ३२६०
  ३९१२
-----------
·०००४२५६२५६ गुणाकार.
```

प्रथम संक्षेप.

गुणक एक अथवा कोणती ही अंक संख्या असून वर कांहीं शून्यें असतील, तर त्यानें गुणायाचा.

रीति.

१ एकावर जीं शून्यें असतील तीं मोजून गुण्यांत तितकीं स्थळें दशांश चिन्ह पुढें (उजवेकडे) न्यावें; कदाचित् तितकीं अंक स्थळें न भरतील तर शून्यें देऊन पुरीं करावीं.

२ जेव्हां गुणक एकाहून हर कोणती दुसरी संख्या असून तिजवर शून्यें असतील तर तीं शून्यें मोजून, गुण्यांत तितकीं स्थळें दशांश चिन्ह पुढें नेऊन, नंतर त्यास शून्य रहित गुणकानें गुणावें.

उदाहरणें.

(१) ३२५·६३२२ हे गुण्य १००० या गुणकानें गूण.

(२) ·००६५ हे गुण्य १००००० या गुणकानें गूण.

प्रमाणें ·०·८३७ हा आहे ज्यांत दशांश स्थळें ६ दर स्थळींचे शून्या इतकी अथवा गुण्यगुणकांत जितकीं दशांश स्थळें आहेत तितकीं आहेत.

३२५·६३२३ गुण्य. १००० गुणक ३२५६३२·३ गुणाकार	·००६५ १००००० ६५० गुणाकार.
(३) २१५·६२४८ हे गुण्य १५००या गुणकानें गूण. २१५६२४८ १५ ३२३४३७२० गुणाकार.	(४) ६५·२१, ३२·००५; ५३ यांस अनुक्रमें २१०, १६०००, ५३००० यांणीं गूण. उ० १३६९४·१, ५१२०८०, २८०९०

दुसरा संक्षेप.

गुणाकारांत हवीं तेवढीं दशांश स्थळें आणण्याचा.

रीति.

गुणाकारांत दशांश स्थळें किती आणावयाचीं ती संख्या मनांत+ आणून गुण्यांत तितकीं दशांश स्थळें डावे कडून मोजून शेवटील स्थळाखालीं गुणकांतील पूर्णांकाचा एकंचा अंक मांडावा. आणि बा-

---

+ स्पष्ट आहे कीं, आपल्यास जेमल्या दशांश स्थळां इतकीं गुणाकारांत दशांश स्थळें घेणे आहेत, तेव्हां शेवटील दशांश स्थळाचे जातीचा अंक कोणत्या अंकानें गुणिलें असतां उत्पन्न होतो हें पहाणें आहे.

सत्यता. एकला एकनें गुणिलें असतां गुणाकार एक, दहनें गुणिलें असतां दह, शतनें गुणिलें असतां शत, दशांशानें गुणिलें असतां दशांश, शतांशानें गुणिलें असतां शतांश, इत्यादि येतो. म्हणजे एकला ज्या ज्या स्थानानें गुणावें, त्या त्या स्थानचा गुणाकार येतो. तसेंच दहचे स्थानाला एकनें गुणिलें असतां गुणाकार दह, दहनें गुणिलें असतां शत, शतनें गुणिलें असतां सहस्र, दशांशानें गुणिलें असतां एक. शतांशानें गुणिलें असतां दशांश गुणाकार येतो, यावरून दहचा स्थानाला ज्या ज्या स्थानानें गुणावें त्या त्या स्थानचा दसपट गुणाकार येतो, शतनें गुणिलें असतां शतपट येतो इत्यादि. जसें एका गुणाकारांत चार दशांश स्थळें पाहिजेत तर शेवटील स्थळ दशसहस्रांशाचें आहे आणि आपल्यास दशसहस्रांशा पर्यंतच गुणाकार घ्यावयाचा आहे म्हणून गुणक अशा स्थितीनें मांडावे कीं, प्रथम स्थानचा गुणाकार दशसहस्रांश येईल, या करितां वर दिहिल्या नियमा प्रमाणें गुणकांतील पूर्णांकाचा एकचा अंक गु-

कीपूर्णांक उजवेकडे उलटें लिहावे. आणि दशांशास्या एकं पासून डावेकडे उलटे लिहावे, नंतर जा गुणकांकानें गुणायाचें त्याचे वरचे अंका पासून आरंभ करावा, आणि गुणाकार उजवे शेवटा पासून लिहावा. सोडल्या गुण्यांकांतून एकजवळच्या अंक गुणून हातचे घ्यावे. ते घेण्याचा मार्ग, ५ पासून १४ पर्यंत हातचा एक, १५ पासून २४ पर्यंत दोन, इ०- हातचे घ्यावे या प्रमाणें सर्व रकमा गुणिल्यावर मिळवणी करून (इच्छिले स्थळावर) उजवेकडून दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरणें.

(१) २१६·५३२८२ हे गुण्य १२·३६ या गुणकानें गूण. असें कीं, गुणाकारांत दशांश स्थळें ३ होतील.

(२) ·०१६३८५ हे गुण्य १२·८५९ या गुणकानें गूण. असें कीं, गुणाकारांत दशांश स्थळें ४ होतील.

ण्यांतील दशसहस्रांश खालीं मांडावा; तसेंच दहे लक्षांशाखालीं, शतें दशलक्षांशाखालीं इ० पूर्णांक मांडावें. दशांशानें सहस्रांशाला गुणिलें असतां गुणाकार दशसहस्रांश वर लिहिल्या प्रमाणें येतो, ह्मणून दशांश सहस्रांशाखालीं, शतांश शतांशाखालीं) सहस्रांश दशांशाखालीं, दशसहस्रांश एकंखालीं इत्यादि दशांशाचे अंक मांडावे.

लक्षांशाचा हातचा दशसहस्रांश आहे याजकरितां गुणाकार करते वेळीं पुढील एकस्थानचा अंक गुणून त्याचा हातचा मात्र घेऊन तो दशसहस्रांशाच्या गुणाकारांत मिळवावा.

पुरा दशक झाल्यावांचून हातचा येत नाहीं, यामुळें बाकी जाऊन चूक पडते ती विशेष न पडावी ह्मणून अर्ध दशक झाल्यावर पुरा दशक धरावा. असें पांच पासून १४ पर्यंत हातचा १, पंधरापासून २४ पर्यंत २ इत्यादि.

गुणाकार याहून ही अधिक बरोबर व्हावा अशी इच्छा असल्यास इच्छिले स्थळाचे पुढील स्थळा पासून हातचे घेते वेळीं बाजूस दोन स्थळीं धन ऋण चिन्हें करून बाकी मांडावी. असें ५४ शीं हातचे ५ धन ४, १८ शीं हातचे २ ऋण २, २१ शीं हातचे २ धन १ आणि २७ शीं हातचे ३ ऋण ३ अशा रीतीनें मांडावें. नंतर सर्व धन धन व ऋण ऋण यांच्या निरनिराळ्या बेरजा घेऊन मोठ्या बेरजेंतून लहान बेरीज वजा करावी. जर बाकी दशकाहून अधिक असेल तर त्याचे त्याचे चिन्हा प्रमाणें तितके दशक गुणाकाराचे शेवटील स्थळांत मिळवावे अथवा वजा करावे.

२१६५३२९२ गुण्य	·११६३८५ गुण्य.
६३२९ गुणक.	९५८२१ गुणक.
१९४८७९५४	१६३९
४३३०६६	२३८
६४९९६०	१३०
१२९९२	८
	१
११९९८०७२ गुणाकार.	·२१०६ गुणाकार

दशांशभागाकार.

रीति.

पूर्णांकाप्रमाणें भाज्य भाजक मांडून, भागाकार करावा, आणि भागाकारांत उजवेकडून इतके स्थळांवर दशांश बिंदु करावा कीं, भाजकापेक्षां भाज्यांत जितकीं दशांश स्थळें जास्त आहेत. कदाचित् भाजकापेक्षां भाज्यांत दशांश स्थळें कमी असतील तर तितकीं शून्यें भाज्यावर घेऊन, नंतर भागाकार करण्यास आरंभ करावा.

भागाकार केल्यावर कांहीं बाकी राहील, तर भाज्यावर शून्यें घेऊन ती बाकीवर घेत जावीं. याप्रमाणें इच्छा आहे तो पर्यंत करावें.

उदाहरणें.

(१) २१२·५७३२ हे भाज्य ९·३१२ या भाजकानें भाग.

```
९·३१२) ४१२·५७३२०० (४४·३०५५ भागाकार हें उत्तर
        ३७२४८
        ४००९३
        ३७२४८
         २८४५२
         २७९३६
           ५१६००
           ४६५६०
            ५०४००
            ४६५६०
             ३८४० बाकी.
```

(२) ५८·७२४० हे भाज्य १२२५·२५ या भाजकानें भाग.

उत्तर·०४५३२८

प्रथम संक्षेप.

भाजक पूर्णांक असून त्याजवर कांहीं शून्यें आहेत.

रीति.

भाजकावरील शून्यें मोजून कापून टाकावीं; आणि तितकीं स्थळें दशांश चिन्ह भाज्यांत डावेकडे सारावें. स्थळें कमी आल्यास शून्यें देऊन पुरीं करावीं; नंतर त्यास शून्यरहित भाजकानें भागावें ह्मणजे भागाकार झाला.

उदाहरणें.

(१) २१६८·४५ हे भाज्य २५०० या भाजकानें भाग.

२५) २१·६८४५० (·८६७३८ भागा.

(२) २६·८४२ यांस १००० यांणीं भाग.

उत्तर·०२६८४२

दुसरा संक्षेप.

भागाकारांत हवीं तेवढीं दशांशस्थळें आणण्याची

रीति.

इच्छिलें दशांशस्थळापर्यंत भागाकार घेणें आहे तर भाज्य भाजक मनांत आणून, भागाकारांत पूर्णांकस्थळें किती येतील, तो अजमास करावा, नंतर जीं पूर्णांकस्थळें येतील, त्यांतील मोठे स्थानच्या अंकापासून भागाकारांत इच्छिलें स्थानचें शेवटील दशांशस्थळापर्यंत जितकीं अंकस्थळें होतील तितकीं स्थळें भाज्यांत डावेकडील प्रथमांकापासून उजवेकडे मोजून शेवटील अंकावर खुणा करावी; कदा

नितु भाज्याचा प्रथम अंक भाजकांतील प्रथम अंकापेक्षां लहान अ सेल तर भाज्यांक दुसरे स्थानचे अंकापासून मोजून खुणा करावी. अ थवा पूर्णांक स्थळें येत नसतील तर दशांशाचा प्रथम भाग कोणते स्था नचा लागती तें पाहून तेथून इच्छिले दशांश स्थळाचे शेवटील स्थळा पर्यंत जितकीं अंकस्थानें होतील तितकीं वर सांगितल्या प्रमाणें भा ज्यांत मोजून खुणा करावी; आणि तितक्या अंकराशीस प्रथम भाग लागण्यास जितका भाजक योग्य आहे तितका ठेवून बाकी उजवे शे वटा कडील भाजकांक कापून टाकावे, नंतर घेतलें भाजकानें घेत ले भाज्यास भागावें आणि जी बाकी राहील ती नवा भाज्य, नवे भाजका करितां पूर्व भाजकांतील उजवे शेवटा कडील एक अंक कापावा+ तो न- वा भाजक. भागाकार करते वेळीं कापले अंकांचा हातचा, दशांश- गुणाकाराचे दुसरे संक्षेपांत सांगितल्या प्रमाणें, घेऊन मागील अं कांचा गुणाकारांत मिळवून ती रकम भाज्यांतून वजा करावी; पुनः दुसरी बाकी नवा भाज्य आणि पूर्व भाजकाचा उजवे शेवटा कडील एक अंक कापून नवा भाजक या प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें. भागा कारांत उजवे शेवटा कडून इच्छिले दशांश स्थळाची संख्या मोजून तितके स्थळांवर दशांश चिन्ह करावें.

+ भाजकांतील एकेक अंक भागाकाराचे प्रतिस्थानीं कापावयाचें कारण. कोण त्याही भागाकारांत जी बाकी राहाते तिला तिचे खालचे स्थानचे अंकाचा जातींत आणण्या करितां दहांनीं गुणावें लागतें तें न गुणितां छेदास दहांनीं भागिल्यानें गुणाकार होतो जसें $\frac{४०}{५}$ यांत अंशास दहांनीं गुणावयाचें आहे तर $\frac{४०\times१०}{५०}$ = $\frac{४०}{५\div१०}$ = यावरून भागाकाराचे प्रतिस्थानीं बाकीस दहांनीं गुणावयाचें त्याठि काणीं भाजकास दहांनीं भागिलें.

आतां कोणत्याही संख्येला दहांनीं भागणें अथवा त्या संख्येचा शेवटील एक अंक कापून टाकणें या दोहीं कडून भागाकाराचे पूर्णांक एकच आहेत.

२ भागाकारांत पूर्णांक स्थळें किती येतील तो समार करून तीं व इच्छिलेलीं दशांश स्थळें मिळून किती स्थळें होतात, तितकीं डावेकडील भाजक स्थळें ठेवून, बाकी कापून टाकावीं, तो भाजक. नंतर या भाजकास जितका भाज्य योग्य असेल, तितका ठेवून बाकी अंक कापून टाकावे; घेतले भाजकानें भाज्य भागून बाकी राहील तो नवा भाज्य झाला. त्यास पूर्व भाजकांत उजवे शेवटचा एक अंक कापून बाकी राहील तो नवा भाजक, पुढें प्रथम रीतींत सांगितल्या प्रमाणें करावें.

जेव्हां भाजक स्थळीं अंकस्थानें उणी आहेत आणि इच्छिले दशांश स्थळासुद्धां भागाकारांत अंक स्थळें अधिक आहेत, तेव्हां प्रथम सरळ भागाकार रीतीनें भागाकार करावा; आणि भागाकार स्थळापेक्षां भाजकांत जितकीं स्थळें उणी असतील तितके अंक भागाकारांत घ्यावे, नंतर संक्षेप रीतीचा उपयोग करावा. जसें इच्छिले सुद्धां भागाकारांत स्थळें सहा आहेत आणि भाजकांत अंक चार आहेत, तर प्रथम सरळ भागाकार रीतीनें भागाकारांत दोन स्थळें घ्यावीं, नंतर संक्षेप रीती चालवावी.

उदाहरणें.

(१) ९२८५·७०३ हे भाज्य ४२५·९७३२ या भाजकानें भाग. असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें ४ होतील.

आतां या भागाकारांत पूर्णांक स्थळें दोन येतील तेव्हां त्यांतील मोठें स्थान दहं तेथ पासून चार दशांश स्थळां पर्यंत म्हणजे दशसहस्रांश पर्यंत स्थळें सहा होतील.

४३१·५९७३२) ९२८५·७०७ (२१·५२८१
　　८७११४७　　　　१२२८
　　———　　　　८७२
　　६६६२४　　　　———
　　४३५९७　　　　३५६
　　———　　　　३४८
　　२३०२७　　　　———
　　२१७९९　　　　　८
　　———　　　　———
　　१२२८　　　　४ बाकी

(२) ३३५·३५२६ हे भाज्य ६०२·६५५६ या भाजकानें भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें पांच होतील.

उत्तर, ५५६४५

(३) ·०३५६७८ हे भाज्य ६२५·३२६५ या भाजकानें भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें सहा होतील.

या भागाकारांत पूर्णांक स्थळें किती येतील याचा अजमास पाहातां पूर्णांकाचे भाग न येऊन दशांशाचे चार भाग शून्याचे येतात.

६२५·३२६५) ·०३२५६७८ (·००००५२
　　३१२
　　———
　　१२
　　१२
　　——

उत्तर ·००००५२

(४) ११६·२५७ हे भाज्य ·४२६६५ या भाजकानें भाग असें की, भागाकारांत दशांशस्थळें तीन होतील.

उत्तर २७२·७२२

दशांश भाजणी.

प्रथम प्रकार.

व्यवहारी अपूर्णांकास बराबर भावाचें दशांशाचें रूप आणयाचा

दशांश भागाकार रीतिप्रमाणें अंशांस छेदांनीं भागावें. अंशाव रहवीं तेवढीं शून्यें घ्यावीं भागाकार येईल ते इच्छिले दशांश येतील+

उदाहरणें.

(१) ५/८ यांस दशांशाचें रूप दे.

८)५.०००
.६२५ हें उत्तर.

(२) ४/९ यांस दशांशाचें रूप दे.

९)४.००००
.४४४४ इ० उत्तर.

(३) १५७६८/९५५२ यांस दशांश रूप दे.

उत्तर १.६५१६८

(४) १/७ यांस दशांश रूप दे.

उत्तर .१४२८५७१४२८५७१ इ०

+ ज्यांचे छेद अविभाज्य संख्या आहेत, अशा व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश रूप द्यावयास इच्छिलें आहे असें कीं, ज्यांचे अंक बहुत होतील; त्याची रीति ही आहे.

उदाहरणें.

१/२९ हा व्यवहारी अपूर्णांक आहे यास दशांश रूप दे.

आतां बाकी एकच अंक राही पर्यंत चालते भागाकारानें अंशांस भागून.

१/२९ = .०३४४८ ८/२९ हें प्र॰स॰ यांत दोन्ही पेट्यांस ८ यांणीं गुणून.

८/२९ = .२७५८६ ६/२९ ही किंमत प्रथम समीकरणांत लिहून.

१/२९ = .०३४४८२७५८६ ६/२९ हें दु॰स॰ यांत दोन्ही पेट्यांस ६ यांणीं गुणून.

६/२९ = .२०६८९६५५१७ ७/२९ ही किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून.

१/२९ = .०३४४८२७५८६२०६८९६५५१७ ७/२९ याप्रमाणें पुढें इच्छा आहे पर्यंत करावें.

यापासून आणखी कळतें कीं, या उदाहरणांत दशांश २८ अंकस्थळांनीं पुनरावृत्त होतात. ह्मणजे सांगितले अपूर्णांकाचे छेदस्थळींचे संख्येंत एक अंक उणा इतके स्थळांनी पुनरावृत्त होतात.

ज्यांचे छेद अविभाज्य संख्या आहेत, असे व्यवहारी अपूर्णांकांत या सारिखेच कांहीं चमत्कारीक गुण आहेत ते समजावे याकरितां बाजूवर दुसरें उदाहरण दाखवितां ज्यांचे छेदस्थळीं ७ ही अविभाज्य संख्या आहे; परंतु यांचे आरंभ वेगळ्या संख्या पासून झाले आहेत, तथापि सहा सहा अंक स्थळांच्या सहा आवृत्ति सहा अंकस्थळाचे मूळ आवृत्तींत आहेत.

१/७ = .१४२८५७१ इ०
२/७ = .२८५७१४२८
३/७ = .४२८५७१४२
४/७ = .५७१४२८५७
५/७ = .७१४२८५७१
६/७ = .८५७१४२८५

दुसराप्रकार.

हलके नावाचे पूर्णांक अथवा दशांश यांस भारी नावाचें दशांशाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. शेवटील अति हलके जातीचे अंक, त्याचे वरचे एकांत किती आहेत त्यांणीं त्या हलके अंकांस दशांश भागाकाराप्रमाणें भागून, भागाकार त्याचे वरचे जातींत मिळवावा. पुनः त्याचे वरचे एका भारींत हे किती आहेत तें पाहून त्यांणीं भागावें, याप्रमाणें शेवट पर्यंत करावें.

उदाहरणें.

(१) २ रुपये १२ आणे ९ पै यांस रुपयाचें दशांश रूप दे.

१२) ९.०००००० पै.
१६) १२.७५०००० आ.
उत्तर २.७९६८७५ रु.

(२) ३ शेर वजनी आहेत यांस खंडीचें दशांश रूप दे.

४०) ३.००० शेर.
२०) .०७५०० मण
उत्तर .००३७५ खंडी

(३) ३ बिघे ५ पांड ३ काठ्या ४ हात १ बीत यांस बिघ्याचें दशांश रूप दे.

उत्तर. ३.२५१४२८५७

(४) ५३३२ इंच यांस मैलाचें दशांश रूप दे.

उत्तर. .०८४१५४ मैल.

तिसराप्रकार.

कोणते ही दशांशाचा भाव त्याचे हलके नावांत काढावयाचा.

रीति.

जा जातीचे दशांश सांगितले असतील, त्या जातीचे एकांत त्याचे खालचे हलके किती आहेत त्यांणीं गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह करावें; नंतर जे दशांश राहातील त्यांस त्या जातीचे एकांत त्याचे खालचे जवळ

चे हलके किती आहेत त्यांणीं गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह करावें. या प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें, नंतर डावेकडील सर्व पूर्णांक जुळून लिहावें ह्मणजे इच्छिलें रूपे झाले.

टीप. ही रीति पूर्णांकांतील उतरतें भाजणी सारखी आहे.

उदाहरणें.

(१) .६२४ विघ्याचे यांचा भाव काय आहे?

.६२४ विघे.
२०
—————
१२.४८० पां०
२०
—————
९.६०० का०
३५
—————
६) २१.०००
—————
३.५०० हात.
२
—————
१.००० वि०

उत्तर वि. पां. का. हा. वि.
०..१२..९..३..१

(२) .३६८७९ मैलाचें यांचा भाव काय आहे?

.३६८७९ मै०
८
—————
२.९५०३२ फ०
४०
—————
३८.०१२८० पो०
११
—————
२) .१४०८०
—————
.०७०४० या.
३
—————
.२११२० फु०
१२
—————
२.५३४४० इं०
३
—————
१.६०३२० बा०

उ० मै० फ० पो० या० फु० इं० बा०
०..२..३८..०..०..२..१.६०३२.

दशांशत्रैराशिक व पंचराशिक.

दशांशत्रैराशिक व पंचराशिकाची रीति पूर्णांकांत त्रैराशिक व पंचराशिक याची रीति सांगितली आहे, त्या प्रमाणेंच आहे, परंतु त्यांत भेद इतकाच आहे कीं, पदें सरूप करणें, गुणाकार व भागाकार करणें ते

दशांश रीतीनें करावें.

उदाहरणें.

(१) एकमण कापसाचे $\frac{३}{५}$ यांस एक रुपयाचे $\frac{५}{८}$ पडतात, तर एक मण कापसाचे $\frac{५}{३२}$ यांस काय पडेल?

$\frac{३}{५}$ = .६, $\frac{५}{८}$ = .६२५, $\frac{५}{३२}$ = .१५६२५

म. म. रु. रु. आ. पै.
.६ : .१५६२५ :: .६२५ :: ० .. २ .. ७.२५ उ.

.६२५
.६) .०९७६५६२५
.१६२७६०४१६६ रु.
१६
२.६०४१६६६५६ आ.
१२
७.२५०००९९४७२ पै

(२) ५$\frac{७}{८}$ खंडीस जर १३२ रुपये २ आणे पडतात तर ३$\frac{१}{२}$ खंडीस काय पडेल?

रु. आ. पै.
उत्तर ८२ .. १२ .. ३.२७७५

द्वादशांशगुणाकार.

व्याख्या.

(१) द्वादशांश गुणाकार म्हणून एक रीति आहे, जीणें करून शिल्पीलोक आपआपलीं कामें मोजितात.

(२) या रीतींत मुख्यत्वें करून जें मोठें मान असेल, त्याचे खालचे प्रत्येक हलके जातीतील अवयव सारखे असले पाहिजेत. असें फुटीचे इंच १२ आणि इंचाचे प्रतिइंच १२ या प्रमाणें.

(३) यांत फूट, इंच आणि प्रतिइंच हीं मानें प्रायः कामांत घेता-

त फुटीफुटींचा गुणाकार फुटी. फुटी इंचाचा गुणाकार इंच आणि इं चा इंचाचा गुणाकार प्रति इं० होतो.

(४) फुटीला एक वेळां फुटीनें गुणिलें असतां चौरस फुटी आणि दोन वेळां गुणिलें असतां त्या गुणाकारास घनफुटी ह्मणावें. तसेंच लांबी, रुंदीचे गुणाकारास क्षेत्रफळ आणि लांबी, रुंदी व उंची अथवा जाडी यांचे गुणाकारास घनफळ ह्मणावें.

रीति.

गुण्य आणि गुणक फुटी खालीं फुटी, इंचा खालीं इंच याप्रमाणें एका खालीं एक येतील, असे लिहावे; नंतर गुण्यांतील हलके नावाचे पदापासून आरंभ करून त्याचें प्रत्येक पद गुणकाचे फूट स्थळीं चे अंकानें गुणावें आणि प्रत्येक पदाचा गुणाकार त्याचे त्याचे खालीं लिहावा; परंतु इंच स्थळींचा गुणाकार बारांपेक्षां अधिक असल्यास बारांनीं भागून बाकी तेथें लिहावी, आणि भागाकार येईल तो हातचा अंक फूट स्थळींचा गुणाकारांत मिळवून लिहावा.

अशा रीतीनें गुण्याचीं वेगळालीं पदें गुणकाचे इंच स्थळीचे अंकानें आणि त्यावरील भागानें प्रत्येकीं गुणून गुणाकार बारांपेक्षां अधिक आल्यास पूर्व प्रमाणें करून गुणाकार उजवेकडे एकेक स्थळ सारून मांडावे; नंतर विविध मिळवणी प्रमाणें त्यांची बेरीज घ्यावी.

या रीतीनें एकर, गुंठे, गज, तसू यांचा ही गुणाकार होतो यांत एकराचे गुंठे ४० आणि गुंठ्याचे प्रतिगुंठे ४० तसें गजाचे तसू २४ आणि तसूचे प्रतितसू २४ धरावे.

उदाहरणें.

(१) ३७ फुटी ३½ इंच हे गुण्य यांस ११ फुटी ६½ इंच यांणीं गूण.

फु०	इं०	म० इं०	
३७	३	६	
११	६	६	
४१०	२	६	
१८	७	९	
१	६	७	९
४३०	४	१० ¾ उत्तर.	

(२) २ एकर १२ गुंठे यांस ५ एकर २० गुंठे यांणीं गूण.

ए०	गुं०
२	१२
५	२०
११	२०
१	६
१२	२६ हें उत्तर.

(३) २ गज १८ तसू यांस ३ गज ८ तसू यांणीं गूण.

उत्तर. ग. ८ .. त. १७

(४) एक संगमरवरी दगड आहे त्याची लांबी ४ फू० ६ इं० रुंदी ५ फूट ६ इं० आणि उंची ६ फू० १ इंच आहे त्याचें घन फळ काय?

उत्तर. फू. १५० .. इं. ६ .. म. इं. ६ घन फळ

घातकर्म.

कोणता ही अंक मूळ करून त्याणें तोच कित्येक वेळां गुणून वाढविला जो गुणाकार त्यास घात ह्मणावें, आणि हा घात करण्याचे रीतीस घात कर्म ह्मणावें. जसें

५ = ५ हें मूळ अ० पांचांचा प्रथम घात आहे.

५×५ = २५ हा पांचांचा द्विघात अथवा वर्ग आहे.

५×५×५ = १२५ हा पांचांचा त्रिघात अथवा घन आहे.

या पुढील कोष्टकांत नऊ अंकांचे नवा पर्यंत घात लिहिले आहेत.

घातकोष्टक.

प्र०	वर्ग	घन	चतु०	पंच०	षड्०	सप्त०	अष्ट०	नवघात.
१	१	१	१	१	१	१	१	१
२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२
३	९	२७	८१	२४३	७२९	२१८७	६५६१	१९६८३
४	१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	१६३८४	६५५३६	२६२१४४
५	२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	७८१२५	३९०६२५	१९५३१२५
६	३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	२७९९३६	१६७९६१६	१००७७६९६
७	४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६४९	८२३५४३	५७६४८०१	४०३५३६०७
८	६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	२०९७१५२	१६७७७२१६	१३४२१७७२८
९	८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३१४४१	४७८२९६९	४३०४६७२१	३८७४२०४८९

घात सूचविणारा जो अंक त्यास घातप्रकाशक म्हणावें. मूळास वाढविण्याकरितां जितके वेळां गुणावे लागतें त्या पेक्षां एकाधिक घातप्रकाशक असतो. हा घातप्रकाशक मूळसंख्येचे वर उजवे आंगास मूळ अंका पेक्षां बारीक लिहावा. असें $५^२=२५$, हा द्विघात अथवा वर्ग दाखवितो. $५^४=६२५$, हा चतुर्घात दाखवितो.

सरूप+ पदाचे दोन किंवा अधिक घात परस्पर गुणायाचे आहेत, तेव्हां त्या घातप्रकाशकाची बेरीज घेऊन, ती मूळपदास प्रकाशक करावी.

टीप. समअपूर्णांका शिवाय बाकी सर्व पूर्णांक अथवा अपूर्णांक यांचे घात उत्तरोत्तर अधिक भावाचे होतात.

+ सरूप म्हणजे बरोबर.

(१) २१६३·४३८ यांचा वर्ग काय होतो?

उत्तर. ४६८०४६३·९७९८४४

(२) ·०२९ यांचा पंच घात काय होतो?

उत्तर. ·०००००००२०५१११४९

(३) $\frac{५}{६}$ यांचा घन काय होतो?

उत्तर $\frac{१२५}{२१६}$

मूळकर्म.

मूळकर्म ह्मणजे कोणते ही घाताचें मूळ काढण्याची रीति. हें घातकर्माचा उलट आहे.

कोणत्या ही घाताचें मूळ ती संख्या आहे कीं, जिचा तितका घात त्या सांगितलेले घाता बराबर आहे. जसें ५ हें २५ याचें वर्गमूळ, आणि ४ हें ६४ यांचें घनमूळ. $५^२=२५$ आणि $४^३=६४$ इत्यादि.

कोणते ही संख्येचा घात बरोबर होतो; परंतु किती एक संख्या अशा आहेत कीं, त्यांचें मूळ बरोबर निघत नाहीं. दशांशाचें सह्या यानें जवळ जवळ मात्र निघतें.

जें मूळ पूर्ण निघत नाहीं, त्यास खंड मूळ अथवा करणी ह्मणतात. आणि जें बराबर निघतें त्यास अखंड ह्मणतात, जसें ५ यांचें वर्गमूळ करणी आहे, आणि ९ यांचें वर्गमूळ अखंड आहे.

वर्गमूळ

वर्गमूळ ह्मणजे सांगितलेली संख्या वर्ग मानून त्यापासून मूळ

काढण्याची रीति आहे.

रीति.

सांगितले वर्गांकांत दोन दोन अंकांचे भाग करावे;[*] प्रथम पूर्णांकांत एकंचे स्थळांतील अंकावर (') असे भाग चिन्ह करावें. पुढें शतंचे स्थानांतील अंकावर. याप्रमाणें एकेक स्थान सोडून, भाग चिन्हें करावीं. तसें दशांशांत प्रथम शतांशाचे अंकावर भाग चिन्ह करावें, तेथून पुढें एकेक स्थान सोडून याप्रमाणें भाग चिन्हें करावीं. कदाचित् दशांशाचे शेवटीं अंक कमी असल्यास शून्य देऊन, भाग चिन्ह करावें.

डावे कडील प्रथम भागांत अति मोठा वर्ग कोणता आहे, तें शोधून, त्याचें मूळ उजवें कडे भागाकारस्थळीं मांडावें आणि त्याचा वर्ग प्रथम भागांतून वजा करून, बाकीवर वरचा एक भाग घ्यावा. हा नवा भाज्य झाला, भाजका करितां पूर्व मूळ दुपट करून, भाजकस्थळीं लिहावें. आ-

---

* कोणत्याही संख्येत एक अंकाचा वर्ग दोन अंकांहून जास्त होत नाहीं, आणि दोन अंकांचा वर्ग तीन अंकांहून कमी आणि चार अंकांहून जास्त होत नाहीं, तीन अंकांचा वर्ग पांच अंकांहून कमी आणि सहा अंकांहून जास्त होत नाहीं. याप्रमाणें पुढें जसें १, ९, १०, ९९ यांचे वर्ग १, ८१, १००, ९८०१ हे आहेत. अथवा बीजरूपानें (१०अ+ब) ही एक दोन अंकांची राशी आहे, जींत ब एकं आणि अ दहं आहे तर हिचा वर्ग १००अ² + २०अब + ब² यांत ब एकंचे स्थानचा अंक २० अब दहंचे स्थानचे अंक आणि १००अ² शतंचे स्थानचे अंक म्हणजे अ जर इतका लहान असेल कीं, त्याचा वर्ग दशाकाहून जास्त होत नाहीं, तर मात्र १००अ² यांची किंमत शेकडेंत म्हणजे तीन अंकांची संख्या होईल, परंतु अचा वर्ग दशाकाहून जास्त होत असेल तर १००अ² हे सहस्र म्हणजे चार अंकांची संख्या होईल. याजकरितां मुळांत इतकीं स्थळें होतील कीं, सांगितले संख्येंत जितकीं भाग स्थळें झालीं आहेत.

‡ या रीतीची सत्यता बीजरूपानें लिहितों. $(अ+ब)^2 = अ^2 + २अब + ब^2 = अ^2 + (२अ+ब) \times ब$ हा वर्ग आहे यांत दिसतें कीं, मूळाचें प्रथम पद अ आणि दुसरें पद ब आहे, आणि प्रथम भाजक अ आणि दुसरा भाजक २अ+ब आहे, म्हणजे मूळांतील प्रथम पदाची दुप्पट करून दुसरें जवळचे पदानें वाढविली, याजकरितां

णि भाज्याचे उजवे शेवटाकडील एक अंक सोडून, राहिले भाज्यांत हा नवा भाजक किती वेळा आतो ते शोधून, तो वेळांक भागाकारस्थळीं व भाजकावर व त्याखालीं लिहावा. नंतर त्यावेळांकानें वाढविल्या नव्या भाजक गुणून, तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा. आणि बाकीवर पुनः वरचा एक भाग घ्यावा हा नवा भाज्य झाला. भाजकरितां पूर्व भाज्यका खालीं जो वेळांक मांडिला आहे, तो त्यांत मिळवावा हा नवा भाजक, नंतर पूर्वप्रमाणें शेवट पर्यंत करावें.

सांगितलें संख्येतील सर्व भाग खालीं आणिल्यावर शेवटीं पूर्णांकाची किंवा दशांशाची बाकी राहिल्यास इच्छा आहे तो पर्यंत प्रति बाकीवर दोन दोन शून्यें देऊन दशांशांत वाढवितां येईल. परंतु तीं शून्यें वर्गांकांवर प्रथम घेऊन, नंतर बाकीवर घेत जावी.

उदाहरणें.

(१) २५६.२५२२७ यांचें वर्गमूळ काढ.

२५६.२५२२७०(१६.००७

२६	१५६
६	१५६
३२००७	२५२२७०

(२) .१ याचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर .३१६२

(३) ७२२.५२६२ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर २६.८९०४

मूळ काढण्याची रीति या प्रमाणें आहे.

प्रथम, भाजक अ) अ² + २अब + ब² (अ + ब हें मूळ
अ²

दुसरा भाजक २अ+ब | २अब+ब² / २अब+ब²
ब

पुनः दुसरें मूळ जाण अ, ब, क तीन पदें आहेत, जसें.
(अ+ब+क)² = अ² + २अब + ब² + २अक + २बक + क² = अ×अ + (२अ+ब)ब + (२अ+२ब+क)×क हा तीन पदांचा वर्ग आहे. यांत मूळाचें प्रथम पद अ, दुसरें पद ब आणि तिसरें पद क आहे आणि प्रथम भाजक अ, दुसरा भाजक २अ+ब आणि तिसरा भाजक २अ+२ब+क

३२००७	२५३२७०	(४) २ आणे ७ पै यांचें वर्गमूळ काढ.
७	२२२४४१	
३२०१४	·२९२२१	

आ. पै.
उत्तर. ·४७२४५२ = ७·१·२६२४

व्यवहारी अपूर्णांकाचें वर्गमूळ.

प्रथमरीति. अंशाचें वर्गमूळ अंशस्थळीं आणि छेदाचें वर्गमूळ छेदस्थळीं ठेवून, नंतर दशांश भागाकार रीतीप्रमाणें भागाकार करावा; ह्मणजे वर्गमूळ झालें.

उदाहरणें.

(१) $\frac{२५}{८१}$ यांचें वर्गमूळ काढ.
$२५^{\frac{१}{२}} = ५$, $८१^{\frac{१}{२}} = ९$ $\left(\frac{५}{९}\right)$
$= \frac{५}{९} =$ ·५५५५५ इ० हें उत्तर.

(२) $\frac{७}{१२}$ यांचें वर्गमूळ काढ.
उत्तर. ·७६३७६

दुसरी रीति. अंशछेदांचा प्रथम दशांश भागाकार रीतीनें भागाकार करून, नंतर त्याचें वर्गमूळ काढावें.

उदाहरणें.

(१) [illegible] यांचें वर्गमूळ काढ.
उत्तर १·८

(२) [illegible] यांचें वर्गमूळ काढ.
उत्तर. ·२६११५७

तिसरी रीति. अंश आणि छेद परस्पर गुणून गुणाकाराचें वर्गमूळ काढून, तें मूळ अपूर्णांकाचे अंश ठिकाणीं ठेवावें. किंवा छेद ठिकाणीं ठेवावें. ह्मणजे वर्गमूळ झालें.*

आहे यांत पाहून स्पष्ट कळतें कीं प्रत्येक भाजक मूळांतील पूर्वीची दुप्पट असून त्यास नवे पदानें वाढविली याचें वर्ग बरोबर आहे.

* [illegible] यांचें वर्गमूळ काढणें आहे; असें मनांत आणा आतां स्पष्ट आहे कीं, कोणत्याही अपूर्णांकाचे अंशछेदांस मत्ते कीं साधारण गुणकानें गुणिला, तर किंमत

उदाहरणें.

$\frac{५}{१२}$, $\frac{९}{११}$ आणि $\frac{३}{१२}$ यांचीं वर्गमुळें काढ.

आतां अंशछेदांचे गुणाकार ६०, ९९, ३६ हे आहेत. ह्मणून

उत्तरें $\begin{cases} \frac{\sqrt{६०}}{१२} = \frac{७.७४५९६६}{१२} = .६४५४९७२ = \sqrt{\frac{५}{१२}} \\ \frac{\sqrt{९९}}{११} = \frac{९.९४९८७४}{११} = .९०४५३४ = \sqrt{\frac{९}{११}} \\ \frac{\sqrt{३६}}{१२} = .५ = \sqrt{\frac{३}{१२}} \end{cases}$

घनमूळ.

घनमूळ ह्मणजे कोणते ही घनाचें मूळ काढणें.

प्रथमरीति.

सांगितले घनाकांचे वर्गमूळांत सांगितले रीतीनें भाग करावे. यां त इतकाच फेर कीं, वर्गमूळासाठीं दोन दोन अंकांचे भाग करावया चे ते घनमूळासाठीं तीन तीन अंकांचे करावे. नंतर डावे कडील प्रथ

बदलत नाहीं. याकरितां $\frac{अ}{ब} = \frac{अ}{ब} \times \frac{ब}{ब} = \frac{अब}{ब^२}$ अथवा $\frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{अ} = \frac{अ^२}{अब}$ आ तां $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{\sqrt{ब^२}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब}$ यांत अंशछेदांचा गुणाकाराचें वर्गमूळ अंश ठिकाणीं ठेविल्यानें अपूर्णांकाचें वर्गमूळ निघतें, हें सिद्ध होतें. तसें $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = \frac{\sqrt{अ^२}}{\sqrt{अब}} = \frac{अ}{\sqrt{अब}}$ यांत गुणाकाराचें वर्गमूळ छेद ठिकाणीं ठेविल्यानें अपूर्णांकाचें वर्गमूळ निघतें हें सिद्ध होतें.

+ सांगितली संख्या तीन तीन अंकस्थळांनीं भाग पाडावे. कारण पुढें सांगतों यावरून लक्षांत येईल. जसें (१०अ+ब) ही दोन अंकांची एक राशी आहे, तर हिचा घन $(१०अ+ब)^३ = १०००अ^३ + ३००अ^२ब + ३०अब^२ + ब^३$ यांत $ब^३$ हे एकं स्थानचे अंक, $३०अब^२$ हे दहं स्थानचे अंक या प्रमाणें $१०००अ^३$ हे सहस्र स्थान चे अंक आहेत. आतां एक अंकाचा घन १, २ अ॰ ३ अंकांचा होतो, यावरून $१०००अ^३$

म भागांत अति मोठा घन कोणते संख्येचा आहे तें शोधून, ती संख्या भागाकार स्थळीं लिहून, तिचा घन प्रथम भागांतून वजा करावा. आणि बाकीवर वरचा एक भाग घ्यावा. तो नवा भाज्य झाला. नवे भाजका करितां वर लिहिले मुळाचे वर्गाची तिप्पट करून लिहावी. आणि त्याचे खाली मूळाची तिप्पट करून, एक अंक पुढें जाईल अशी लिहावी. त्यांची बेरीज नवा भाजक होईल. नंतर भाज्यांतील एक अंक सोडून, बाकींतून हा भाजक किती वेळां जाईल, तो अंक भागाकार स्थळीं पूर्व अंकांचे उजवेकडे लिहावा. भागाकार स्थळीं दोन अंक झाले. त्यांत पूर्वीचे अंकास (अ) आणि नवे अंकास (ई) असें नाव द्यावें.

हे सहस्र, दशसहस्र, अथवा लक्ष होतील. याज करितां दोन अंकांचा घन ४,५ अथवा ६ स्थानें पर्यंत होईल, आणि तीन स्थानांचा घन सात पासून नऊ स्थानें पर्यंत होईल. ते कां हरएक घनांकांतील पूर्णांकाचा डावे कडील प्रथम भाग कधीं १,२, अथवा ३ अंकांचा होईल. बाकी भाग तीन तीन अंकांचे, या प्रमाणें चतुर्घात मूळांत चार चार अंकाचे, पंचघात मूळांत पांच पांच अंकांचे इत्यादि भाग होतील.

वरील रीतीची सत्यता बीज रूपानें लिहितों. $(अ+ब)^{३} = अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३} = अ^{२}\times अ+(३अ^{२}+३अब+ब^{२})\times ब$ हा घन आहे यांत दिसतें कीं, मूळचें प्रथम पद अ आणि दुसरें पद ब प्रथम भाजक $अ^{२}$ आणि दुसरा भाजक $(३अ^{२}+३अब+ब^{२})$ म्हणजे मूळांतील प्रथम पदाचे वर्गाची तिप्पट अधिक प्रथम पदाची तिप्पट गुणिली दुसरे पदानें अधिक दुसरे पदाचा वर्ग. आतां वर्गमूळ काढण्याचा रीति प्रमाणें.

प्रथम भाजक $अ^{२}$) $अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$ (अ+ब हें मूळ.

$अ^{३}$

दुसरा भाजक. $३अ^{२}+३अब+ब^{२}$ | $३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$

$३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$

पुनः दुसरें मूळ जेथें अ, ब, क हीं तीन पदें आहेत जसें $(अ+ब+क)^{३} = अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}+३अ^{२}क+६अबक+३ब^{२}क+३अक^{२}+बक^{२}+क^{३} = अ^{३}(३अ^{२}+३अब+ब^{२})$

नंतर अचा वर्ग गुणिला ई आणि तिप्पट अ गुणिला ईचा वर्ग आणि ईचा घन हे तीन गुणाकार एकाखाली एक एकेक स्थान पुढे सारून लिहावे. आणि त्यांची बेरीज घेऊन, भाज्यांतून वजा करावी. बाकीवर वरचा एक भाग घ्यावा. तो नवा भाज्य झाला. नवा भाजक, मूळस्थ ओंचे सर्व अंकापासून पूर्व प्रमाणें उत्पन्न करावा. तो झाल्यानंतर जो वेळांक येईल, त्याचें नाव ई आणि बाकी मागील सर्व अंकांचें नाव अ ठेवावें; आणि वर प्रमाणे कृति करून बाकी काढावी. याप्रमाणें पुढे ही.

उदाहरणें.

(१) १५८४.३८२ याचें घनमूळ काढ.

२×२=१२ ३×२= ६	१५८४.३८२ (२१.२ हे घनमू. ८
न. भाज. १२६	१५८४ नवा भाज्य.
२×३×१=१२ २×३×१= ६ १³= १	बेरीज
२१×२=१३२३ २१×३= ६३	१२६१ शोधक
नवाभा. १३२३	३२३३८२ नवाभाज्य.
२१×३×२= २६४६ २१×३×२²= २५२ २³= ८	बेरीज
	२६७१२८ शोधक.
	५६२५४ बाकी.

(२) ५७१४८२.१९ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर. ८२.९

(३) १⅘ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर १.२७१

(४) ८ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर. ९२.८२१७८.

(५) १५.१५ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर. २१.२२१

दुसरी रीति.

×व+(३(अ+व)²+३(अ+व)×क+के)क यांतील पदांचा घन आहे. जांत मूळाचें प्रथम पद अ दुसरें पद व आणि तिसरें पद क, प्रथम भाजक ३अ² दु. भा. (३अ²+३अव+व²) आणि ति. भा. (३(अ+व)²+३(अ+व)क+क²) आहे.

क्रमाराने अथवा कोष्टकापासून सांगितले घनाचे अति संनिध कमी किंवा अधिक अखंड घन घ्यावा, त्याचें नाव (अ), सांगितले घनाचें नाव (प) घेतले घनाचें मूळ (र) आणि सांगितले घनाचें इच्छिलें मूळ (ल) कल्पावें. नंतर खालीं लिहिल्या प्रमाणें त्रैराशिकानें मूळ काढावें. प+२अ : र :: अ+२प : ल अथवा प+२अ : र :: प~अ : ल~र.

अशा रीतीनें उत्पन्न केले मूळाचा घन करून, तो घेतला घन असें मानून, वर लिहिल्या प्रमाणें तपशील करावा, ह्मणजे अति संनिध दुसरें मूळ निघेल. या प्रमाणें पुनः पुन्हा तपशील केल्यानें फार जवळ मूळ निघेल.

उदाहरण.

६५८·६२७ याचें घनमूळ काढ.

यांत अ = ६५८, प = ६५८·६२७, र = ८·६९७७ वर लिहिल्या प्रमाणें तपशील करून

११७५·६२७ : ८·६९७७ :: ११७५·२५४ : ८·७००५ हें उ०

कोणतेंही मूळ.

प्रथम रीति. चतुर्घात मूळ काढणें असल्यास चार चार अंकांचे भाग करावे. पंचघात मूळ काढणें असल्यास पांच पांच अंकांचे करावे, या प्रमाणें पुढें ही.

प्रथम भागांतून सांगितले घाताचें विवक्षित मूळ काढून, तें भागाकार स्थळीं लिहावें त्याचें नाव (अ) नंतर अ चा इसका घात प्रथम

भागांतून वजा करून बाकीवर वरचा एक भाग घ्यावा. हा नवा भाज्य झाला. नवे भाजका करितां अचा एकोन घात गुणिला घात प्रकाश कानें ही प्रथम श्रेणी, नंतर वर लिहिले घात प्रकाशकांत एक उणा अचा घात गुणिला वरील श्रेणीतील घात प्रकाशक आणि वेळाप्रकाशक यांचे गुणाकाराला भागिलें श्रेणीचे संख्येने ह्मणजे दुसरे श्रेणी करितां दोहोंनीं तिसरे श्रेणी करितां तिहींनीं इत्यादि संख्येनें भागून भागाकार येईल ती दुसरी श्रेणी, पूर्व श्रेणीचे खालीं लिहावी. या प्रमाणें सर्व श्रेण्या तयार कराव्या. अशा कीं, शेवटील श्रेणींत घात प्रकाशक एक होईल. नंतर श्रेणीचीं पदें गुणून गुणाकार एकेक स्थळ पुढें जात असे मांडावे; मग सर्व गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. तो भाजक झाला. नंतर भाज्यांतील शेवटचा एक अंक नाहीं, असें मनांत आणून जी भाग लागेल ती भागाकार स्थळीं पूर्व भागाकारावर मांडावा त्याचें नाव (ई) वर भाजका करितां तयार केले श्रेण्यास अनुक्रमें ई, ई², ई³ इत्यादि यांणीं गुणावें, आणि जितके घात मूळ काढावयाचें तितका ईचा घात शेवटीं मांडावा. नंतर हे सर्व गुणाकार वर लिहिल्या प्रमाणें एकेक अंक पुढें जातील, असे लिहून बेरीज घ्यावी. आणि ती भाज्यांतून वजा करून बाकी काढावी. आणि तीवर वरचा एक भाग घ्यावा तो नवा भाज्य. भाजका करितां भागाकार स्थळीं जे अंक असतील, त्यांचें नाव अ ठेवून पूर्व प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें.

उदाहरणें.

(१) ३०९.६५८०४ यांचें चतुर्थात मूळ काढ.

(२) १७१२.५ यांचें घन मूळ काढ.

४³×४= २५६ ४³×६= ९६ ४×४= १६	३०१.६५८४ (४.४ चमू. २५६	उत्तर. ११.९६
भाजक. २६५७६	१३३६५.८४ नं.भाज्य ११८८०९६	
४³×४×४ = १०२४ ४²×६×४² = १५३६ ४ ×४×४³= १०२४ ४⁴ = २५६	१४८४८८ बाकी. बेरीज	

११८८०९६ शोधक.

दुसरीरीति.

(प) सांगितला घात (न) सांगितले संख्येचें वर्गादि मूळ प्रकारांक वि ह,(अ) अतिसंनिध घेतला घात (र) घेतले घाताचें मूळ (ल) इच्छिलें मूळ, असें मानून खालीं लिहिल्या प्रमाणें त्रैराशिकानें मूळ काढावें.

(न+१)अ+(न-१)प : र :: (न+१)प+(न-१)अ : ल अथवा (न+१)½अ+(न-१)½प : र :: प ~ अ : र ~ ल.

उदाहरणें.

(१) २.६११७७ यांचें पंच घात मूळ काढ.

प = २.६११७७, न = ५, अ = २.४८८३२, र = १.२

२५.२७७ : १.२ :: २५.६२३९ : १.२१५८ पंच घात मूळ हें उत्तर.

(२) २१०३५.८ यांचें षड् घात मूळ काढ.

उत्तर, ५.२५४०३७

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ
१	१	१	१·०००००००	१·००००००
२	४	८	१·४१४२१३६	१·२५९९२१
३	९	२७	१·७३२०५०८	१·४४२२५०
४	१६	६४	२·०००००००	१·५८७४०१
५	२५	१२५	२·२३६०६८०	१·७०९९७६
६	३६	२१६	२·४४९४८९७	१·८१७१२१
७	४९	३४३	२·६४५७५१३	१·९१२९३३
८	६४	५१२	२·८२८४२७१	२·००००००
९	८१	७२९	३·०००००००	२·०८००८४
१०	१००	१०००	३·१६२२७७७	२·१५४४३५
११	१२१	१३३१	३·३१६६२४८	२·२२३९८०
१२	१४४	१७२८	३·४६४१०१६	२·२८९४२८
१३	१६९	२१९७	३·६०५५५१३	२·३५१३३५
१४	१९६	२७४४	३·७४१६५७४	२·४१०१४२
१५	२२५	३३७५	३·८७२९८३३	२·४६६२१२
१६	२५६	४०९६	४·०००००००	२·५१९८४२
१७	२८९	४९१३	४·१२३१०५६	२·५७१२८२
१८	३२४	५८३२	४·२४२६४०७	२·६२०७४१
१९	३६१	६८५९	४·३५८८९८९	२·६६८४०२
२०	४००	८०००	४·४७२१३६०	२·७१४४१८
२१	४४१	९२६१	४·५८२५७५७	२·७५८९२३
२२	४८४	१०६४८	४·६९०४१५८	२·८०२०३९
२३	५२९	१२१६७	४·७९५८३१५	२·८४३८६७
२४	५७६	१३८२४	४·८९८९७९५	२·८८४४९९
२५	६२५	१५६२५	५·०००००००	२·९२४०१८

वर्ग, घन आणि मूळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
२६	६७६	१७५७६	५.०९९०१९५	२.९६२४९६
२७	७२९	१९६८३	५.१९६१५२४	३.००००००
२८	७८४	२१९५२	५.२९१५०२६	३.०३६५८९
२९	८४१	२४३८९	५.३८५१६४८	३.०७२३१७
३०	९००	२७०००	५.४७७२२५६	३.१०७२३२
३१	९६१	२९७९१	५.५६७७६४४	३.१४१३८१
३२	१०२४	३२७६८	५.६५६८५४२	३.१७४८०२
३३	१०८९	३५९३७	५.७४४५६२६	३.२०७५३४
३४	११५६	३९३०४	५.८३०९५१९	३.२३९६१२
३५	१२२५	४२८७५	५.९१६०७९८	३.२७१०६६
३६	१२९६	४६६५६	६.०००००००	३.३०१९२७
३७	१३६९	५०६५३	६.०८२७६२५	३.३३२२२२
३८	१४४४	५४८७२	६.१६४४१४०	३.३६१९७५
३९	१५२१	५९३१९	६.२४४९९८०	३.३९१२११
४०	१६००	६४०००	६.३२४५५५३	३.४१९९५२
४१	१६८१	६८९२१	६.४०३१२४२	३.४४८२१७
४२	१७६४	७४०८८	६.४८०७४०७	३.४७६०२७
४३	१८४९	७९५०७	६.५५७४३८५	३.५०३३९८
४४	१९३६	८५१८४	६.६३३२४९६	३.५३०३४८
४५	२०२५	९११२५	६.७०८२०३९	३.५५६८९३
४६	२११६	९७३३६	६.७८२३३००	३.५८३०४८
४७	२२०९	१०३८२३	६.८५५६५४६	३.६०८८२६
४८	२३०४	११०५९२	६.९२८२०३२	३.६३४२४१
४९	२४०१	११७६४९	७.०००००००	३.६५९३०६
५०	२५००	१२५०००	७.०७१०६७८	३.६८४०३१

वर्ग, घन आणि मूळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
५१	२६०१	१३२६५१	७.१४१४२८४	३.७०८४३०
५२	२७०४	१४०६०८	७.२१११०२६	३.७३२५११
५३	२८०९	१४८८७७	७.२८०१०९९	३.७५६२८६
५४	२९१६	१५७४६४	७.३४८४६९२	३.७७९७६३
५५	३०२५	१६६३७५	७.४१६१९८५	३.८०२९५३
५६	३१३६	१७५६१६	७.४८३३१४८	३.८२५८६२
५७	३२४९	१८५१९३	७.५४९८३४४	३.८४८५०१
५८	३३६४	१९५११२	७.६१५७७३१	३.८७०८७७
५९	३४८१	२०५३७९	७.६८११४५७	३.८९२९९६
६०	३६००	२१६०००	७.७४५९६६७	३.९१४८६७
६१	३७२१	२२६९८१	७.८१०२४९७	३.९३६४९७
६२	३८४४	२३८३२८	७.८७४००७९	३.९५७८९२
६३	३९६९	२५००४७	७.९३७२५३९	३.९७९०५७
६४	४०९६	२६२१४४	८.०००००००	४.००००००
६५	४२२५	२७४६२५	८.०६२२५७७	४.०२०७२६
६६	४३५६	२८७४९६	८.१२४०३८४	४.०४१२४०
६७	४४८९	३००७६३	८.१८५३५२८	४.०६१५४८
६८	४६२४	३१४४३२	८.२४६२११३	४.०८१६५६
६९	४७६१	३२८५०९	८.३०६६२३९	४.१०१५६६
७०	४९००	३४३०००	८.३६६६००३	४.१२१२८५
७१	५०४१	३५७९११	८.४२६१४९८	४.१४०८१८
७२	५१८४	३७३२४८	८.४८५२८१४	४.१६०१६८
७३	५३२९	३८९०१७	८.५४४००३७	४.१७९३३९
७४	५४७६	४०५२२४	८.६०२३२५३	४.१९८३३६
७५	५६२५	४२१८७५	८.६६०२५४०	४.२१७१६३

वर्ग, घन आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
७६	५७७६	४३८९७६	८.७१७७९७९	४.२३५८२३६
७७	५९२९	४५६५३३	८.७७४९६४४	४.२५४३२१०
७८	६०८४	४७४५५२	८.८३१७६०९	४.२७२६५८६
७९	६२४१	४९३०३९	८.८८८१९४४	४.२९०८४०४
८०	६४००	५१२०००	८.९४४२७१९	४.३०८८६९५
८१	६५६१	५३१४४१	९.०००००००	४.३२६७४८७
८२	६७२४	५५१३६८	९.०५५३८५१	४.३४४४८१५
८३	६८८९	५७१७८७	९.११०४३३६	४.३६२०७०७
८४	७०५६	५९२७०४	९.१६५१५१४	४.३७९५१९१
८५	७२२५	६१४१२५	९.२१९५४४५	४.३९६८२९६
८६	७३९६	६३६०५६	९.२७३६१८५	४.४१४००४९
८७	७५६९	६५८५०३	९.३२७३७९१	४.४३१०४७६
८८	७७४४	६८१४७२	९.३८०८३१५	४.४४७९६०२
८९	७९२१	७०४९६९	९.४३३९८११	४.४६४७४५१
९०	८१००	७२९०००	९.४८६८३३०	४.४८१४०४७
९१	८२८१	७५३५७१	९.५३९३९२०	४.४९७९४१४
९२	८४६४	७७८६८८	९.५९१६६३०	४.५१४३५७४
९३	८६४९	८०४३५७	९.६४३६५०८	४.५३०६५४९
९४	८८३६	८३०५८४	९.६९५३५९७	४.५४६८३५९
९५	९०२५	८५७३७५	९.७४६७९४३	४.५६२९०२६
९६	९२१६	८८४७३६	९.७९७९५९०	४.५७८८५७०
९७	९४०९	९१२६७३	९.८४८८५७८	४.५९४७००९
९८	९६०४	९४११९२	९.८९९४९४९	४.६१०४३६३
९९	९८०१	९७०२९९	९.९४९८७४४	४.६२६०६५०
१००	१००००	१००००००	१०.०००००००	४.६४१५८८८

उत्तर, गुणोत्तर, प्रमाण, आणि श्रेढी.

व्याख्या.

(१) किती एक संख्यांचा दोन प्रकारें संबंध असतो.

प्रथम प्रकार. दोन संख्यांचे वजाबाकीवर आहे, तो गणित संबंधी. आणि दोन संख्यांचे वजाबाकीस उत्तर म्हणावें जसें ६ आणि २ या दोन संख्यांचे उत्तर (वजाबाकी) ४ आहे.

दुसरा प्रकार. दोन संख्यांचे भागाकारावर आहे, तो भूमितिसंबंधी. आणि दोन संख्यांचे भागाकारास गुणोत्तर म्हणावें जसें ६ आणि २ यांचें गुणोत्तर (भागाकार) ३ आहे.

(२) या कामासाठी संख्या अथवा पदें २ पाहिजेत. जिचा विचार करणे ती प्रथम लिहून, तिला अग्रसर आणि जिशीं विचार करणे ती मागून लिहून, तिला उपाग्रसर ह्मणावें, जसें वरचे दोन संख्यांतीत ६ अग्रसर, आणि २ उपाग्रसर.

(३) कोणता ही अग्रसर आणि त्याचा उपाग्रसर मिळून दोहोंला एक युग्म म्हणावें.

(४) दोन किंवा अधिक युग्मांचें उत्तर किंवा गुणोत्तर बरोबर असलें ह्मणजे, त्या बरोबरीस प्रमाण ह्मणावें; आणि तें प्रमाण दाखवणारीं जीं पदें तीं प्रमाणपदें होत. जसें ७,९ आणि २,४ हें गणित प्रमाण, तसें ६,१२ आणि ४,८ हें भूमिती प्रमाण यांत भूमिति प्रमाण दाखविणें असल्यास प्रत्येक युग्माचे पदांमध्यें : असे दोन बिंदू व प्रत्येक युग्मामध्यें :: असे चार बिंदू द्यावे. जसें ६:४ :: १२:८

(५) प्रमाण दोन प्रकारचें आहे; अखंड आणि खंड. जेव्हां दोन युग्माचें उत्तर किंवा गुणोत्तर कोणत्याही युग्माचा उपाग्रसर आणि त्याचे जवळचे पुढील युग्माचा अग्रसर यांचें उत्तर किंवा गुणोत्तर याशीं अनुक्रमें बराबर असेल, तर त्यास अखंड प्रमाण ह्मणावें. आणि बराबर नसल्यास खंड प्रमाण ह्मणावें. जसें.

८, १० आणि १२, १४ अखंड गणित प्र० १६ : ३२ :: ६४ : १२८ अ० भू० प्र०
२ २ २ उत्तरें बरोबर आहेत ह्मणून. २ २ २ गुणोत्तरें ब०

६, ८ आणि १४, १६ खंड गणित प्रमाण. १८ : ३६ :: ८ : १६ खं० भू० प्र०
२ ६ २ उत्तरें बरोबर नाहींत ह्मणून. २ ३६/८ २ गुणो० ब० नाहींत ह्मणून.

(६) दोन युग्मांचीं उत्तरें बरोबर असलीं, तर त्याला गणित प्रमाण ह्मणावें; आणि गुणोत्तरें बरोबर असलीं तर त्याला भूमिति प्रमाण ह्मणावें. जसें. ५, ७ आणि ११, १३ हे ग० प्र० ८ : १६ :: ४ : ८ हें भू० प्र०

(७) कित्येक पदें एकाच उत्तरानें किंवा गुणोत्तरानें चढतीं किंवा उतरतीं असलीं ह्मणजे त्या पंक्तीस श्रेढी ह्मणावें. त्यांत पदें उतरत असलीं ह्मणजे त्यास उतरती श्रेणी आणि चढत असलीं म्हणजे चढणी श्रेणी ह्मणावें. जसें.

१, ३, ५, ७, ९, ११, १३ इ० चढ० ग० श्रे० २०, १७, १४, ११, ८, ५, २ इ० उत० ग० श्रे०

१, ३, ९, २७, ८१, २४३ अ० } इ० चढ० भू० श्रे० १२८, ६४, ३२, १६, ८, ४, २ } इ० उ० भू० श्रे०
१/१२८, १/६४, १/३२, १/१६, १/८, १/४ } १/३, १/९, १/२७, १/८१, १/२४३, १/७२९ }

(८) कोणत्याही श्रेढीच्या प्रथम पदास आदि, शेवटील पदास अंत, आणि पद संख्येस गच्छ, जवळ जवळच्या दोन पदांच्या वजा बाकीस उत्तर, व जवळ जवळच्या दोन पदांच्या भागाकारास गुणोत्तर, आणि श्रेढींतील

सर्व पदांचे बेरजेस सर्वधन ह्मणावें.

गणितश्रेढी.

गणित श्रेढीमध्यें किती एक उपयोगी विषय पुढील सिद्धांतांत सांगतों.

प्रथम सिद्धांत. जेव्हां गणित श्रेढींत चार पदें आहेत, तेव्हां आद्यंतांची बेरीज दोन मध्यांचे बेरजे बरोबर आहे. जसें ८,६ आणि १०,८ एथें ८+८=१०+६=१६

दुसरा सिद्धांत. कोणते ही गणित श्रेढी मध्यें आद्यंतांची बेरीज त्या आद्यंतांचे जवळचे दोन दोन पदांचें एक युग्म अशी त्यांचे जवळजवळचे पदांची जितकीं युग्में होतील, त्यांचे प्रत्येक बेरजे बरोबर आहे, आणि श्रेढी विषम पद असल्यास मध्य पदाचे दुपटी बरोबर आहे. जसें ३,५,७,९,११,१३,१५ एथें ३+१५=५+१३=७+११=९×२=१८

तिसरा सिद्धांत. कोणते ही गणित श्रेढी मध्यें आद्यंतांची वजाबाकी, उत्तर एकोन गच्छानें गुणिलें त्या गुणाकारा बरोबर आहे. जसें, ५,८,११,१४,१७,२० एथें २०−५=१५ ही वजाबाकी उत्तर ३ आणि एकोन गच्छ ५ यांचे गुणाकारा बरोबर आहे.

चवथा सिद्धांत. आद्यंतांची बेरीज गच्छानें गुणावी, आणि तो गुणाकार दोहोंनीं भागावा. भागाकार येईल तो सर्व पदांची बेरीज+ (सर्वधन) आहे. जसें ३,५,७,९,११,१३,१५, एथें $\frac{(३+१५)७}{२}$ =६३ सं०

+ उघड आहे की, दिले श्रेणी एकदीच दुसरी श्रेढी पूर्व श्रेढी खाली उलट क्रमानें मांडून दोहोंचा बेरजा घ्याव्या आणि त्या सर्व बेरजा मिळविल्या दिले श्रेढीचे आद्यंत पदांचे बेरजे बरोबर होतील, आणि त्या बेरजा गच्छ संख्ये इतक्या

कृत्यें.

(१) आदि अंत आणि गच्छ यांपासून सर्वधन काढावयाचें.

रीति- वपथ्ये सिद्धांत प्रमाणें.

उदाहरणें.

(१) आदि २ अंत ८१ आणि गच्छ ४० यांपासून सर्वधन काढ.

$\frac{(२+८१)\times ४०}{२}$ = १६६० उत्तर सर्व.

(२) एका राजानें आपले १०५ शिपायांस पागोटीं दिलीं प्रथम मास १ शेवट त्यास २०९ तेव्हां एकंदर पागोटीं किती. उत्तर ११०२५

---

(२) आदि अंत आणि गच्छ यांपासून उत्तर काढावयाचें.

रीति- आद्यंतांची वजाबाकी एकोन गच्छानें भागावी. भागाकार येईल तें उत्तर.

उदाहरणें.

(१) आदि ३ अंत ८१ गच्छ ४० यांपासून उत्तर काढ.

$\frac{८१-३}{३९}$ = २ उत्तर

(२) आदि १ अंत २०९ गच्छ १०५ यांपासून उत्तर काढ. उत्तर २

(३) आदि अंत आणि उत्तर यांपासून गच्छ काढावयाचें.

रीति- आद्यंतांची वजाबाकी उत्तरानें भागावी, भागाकार येईल, तो एकोन गच्छ, त्यांत एक मिळवावा म्हणजे गच्छ झाला.

उदाहरणें.

(१) आदि ३ अंत ८१ आणि उत्तर- (२) एका राजानें शिपायास पागोटीं

होतील. याजकरितां त्यांतील एक वेरीज गच्छानें गुणिली असतां गुणाकार मूळ श्रेढीचे दुप्पट होतो म्हणून दोहोंनीं भागिलें असतां मूळ श्रेढीचें सर्व धन होतें.

र ३ यां पासून गच्छ काढ.

$\frac{८१-३}{२}+१$ = ४० गच्छ हें उत्तर.

दिलीं प्रथमास १ दुसऱ्यास २ जास्त, शेवटल्यास २०९ तेव्हां एकंदर शिपाई किती? उत्तर, १०५

(४) आदि, अंत आणि उत्तर या पासून सर्वधन काढावयाचें.

रीति. आद्यंतांची वजाबाकी उत्तरानें भागावी, त्यांत १ मिळवून त्याणें आद्यंतांचे अर्ध बेरजेस गुणावें. तो गुणाकार सर्वधन होईल.

उदाहरणें.

(१) आदि ५, अंत ६८ आणि उत्तर ३ यां पासून सर्वधन काढ.

$\left(\frac{६८-५}{३}+१\right)\times\frac{६८+५}{२}$ = ८०३ स.

(२) कोणी मनुष्य देवाचे दर्शनास जात होता. त्यानें वाटेंत प्रथम पायरीवर १ नारळ, पुढें प्रत्येकीं दोन चढते शेवटीं १०२ असे ठेविता, त्यास किती नारळ लागतील?

उत्तर २७०४

(५) सर्वधन, उत्तर आणि गच्छ यां पासून आदि, अंत काढावयाचे.

रीति. सर्वधन दोहोंनीं गुणून, तो गुणाकार गच्छानें भागावा. नंतर गच्छांत एक उणा करून उत्तरास गुणावें तो गुणाकार आणि पूर्व भागाकार यांचे बेरजेचें अर्ध तें मोठें पद आणि वजाबाकीचें अर्ध तें लहान पद होईल.

उदाहरणें.

(१) सर्वधन १६८०, उत्तर २, गच्छ ४० यां पासून आदि अंत काढ.

$\frac{१६८०\times२}{४०}$ = ८४, २×३९ = ७८,

(२) एका राजानें १०५ शिपायांस ११२५ पागोडीं दिलीं अशी कीं, एकापेक्षां दुसऱ्यास दोन जास्त याप्रमाणें

$\frac{८४+७८}{२}$ = ८१ मो०प. $\frac{८४-७८}{२}$ = ३ ल. | तेव्हां पहिल्यास व शेवटल्यास किती किती पागोटीं दिलीं?

उत्तर { पहिल्यास १
शेवटल्यास २०९

(६) सर्वधन, आदि आणि अंत यां पासून उत्तर काढावयाचें.

रीति. सर्वधन दोहोंनीं गुणून, त्यांत आद्यंतांची बेरीज, वजा करावी, त्या बाकीनें आद्यंतांचे वर्गांचे वजाबाकीला भागावें, भागाकार येईल तें उत्तर.

उदाहरणें.

(१) सर्वधन १९३५, आदि ३, अंत ८७ या पासून उत्तर काढ.

१९३५×२−९० = ३७८०

$\frac{७५६९-९}{३७८०}$ = २ हें उत्तर.

(२) आदि १/२, अंत २ १/२, सर्वधन १६, त्या श्रेढीचें उत्तर काय?

उत्तर, १/२ श्रेढीचें उत्तर.

(७) आदि, अंत आणि सर्वधन यां पासून गच्छ काढावयाचें.

रीति. सर्वधन दोहोंनीं गुणून, तो गुणाकार आद्यंतांचे बेरजेनें भागावा. भागाकार येईल तो गच्छ झाला.

उदाहरणें.

(१) आदि ८, अंत १०५ आणि सर्वधन ८१२० यां पासून गच्छ काढ.

$\frac{८१२०×२}{११३}$ = २० गच्छ हें उत्तर.

(२) आदि १/२, अंत २ १/२, सर्वधन १६ यां पासून गच्छ काढ.

उत्तर, ८ गच्छ

(८) एक शेवटील पद, उत्तर आणि गच्छ यां पासून दुसरें शेवटील पद काढावयाचें.

रीति. उत्तर एकोन गच्छानें गुणावें; तो गुणाकार आद्यंतांची वजाबाकी होईल. लहान पद सांगितलें आहे, तर हा गुणाकार त्या पदांत मिळवावा; ह्मणजे मोठें पद होईल. आणि मोठें पद सांगितलें आहे, तर हा गुणाकार त्या पदांत वजा करावा; ह्मणजे लहान पद होईल.

उदाहरणे.

(१) आदि ८, उत्तर २, गच्छ १५ यांपासून अंत काढ.

२×१४ = २८+८ = ३६ अंत हेंउ.

(२) अंत $(-\frac{२५}{२})$, उत्तर $(-\frac{३}{२})$ गच्छ १० यांपासून आदि काढ.

उत्तर, $+\frac{३}{२}$ आदि.

(९) कोणते ही दोन पदां पासून एक गणित मध्य प्रमाण काढायाचें.

रीति. आद्यंतांचे बेरजेचें अर्ध करावें, तें मध्य प्रमाण होईल.

उदाहरणें.

(१) ३ आणि ११ यांचे एकगणित मध्य प्रमाण काढ.

$\frac{११+३}{२}$ = ७ हें उत्तर.

(२) एका घराचा धारण २५ हात आणि खांब १२ हात, यांवर १ वासा आहे, तो मोडत असतां मध्यावर ठेकूं देणें आहे, तो किती द्यावा?

उत्तर १९ हात.

(१०) कोणते ही दोन पदांचीं हवीं तितकीं गणित मध्य प्रमाणें काढायाचें.

रीति. मोठे पदांतून लहान पद वजा करावें; नंतर मध्य प्रमाणें जितकीं ह्मावीं, ती संख्या एकाधिक करून, तिनें ती बाकी भागावी. भागाकार येईल, तें श्रेढीचें उत्तर; हें लहान पदांत मिळवित चलावें, किंवा मोठे पदांत वजा करीत चलावें.

उदाहरणें.

(१) २ आणि २० यांचीं ५ गणित मध्यप्रमाणें काढ.

$\frac{२०-२}{६}$ = ३ उत्तर. २+३=५+३=८+३=११+३=१४+३=१७ अथवा

२०-३=१७-३=१४-३=११-३=८-३=५ उत्तर १७, १४, ११, ८, ५

(२) ५१ हात लांबीचा चवथऱ्यावर घर बांधावयाचें आहे, त्याला-सारखे अंतरानें ९ बारें घालावयाचीं आहेत; जर एकेक बारा खालीं एकेक हात रुंद भिंत घातली, तर प्रत्येक खणाची मधील रुंदी-किती? आणि बाराची रुंदी एकेक हात असल्यास प्रथम बारा पासून प्रत्येक बार किती अंतरावर घालावें.

उत्तर. { प्रत्येक खणाची रुंदी ५$\frac{१}{८}$ हात
प्रथम बारा पासून अंतर ५$\frac{१}{८}$, ११$\frac{२}{८}$, १७$\frac{३}{८}$, २४, ३०$\frac{५}{८}$, ३६$\frac{६}{८}$, ४२$\frac{७}{८}$, ४९

भूमितिश्रेढी.

भूमितिश्रेढीमध्यें किती एक उपयोगी विषय पुढील सिद्धांतांत सांगतों.

प्रथम सिद्धांत:- जेव्हां चार पदें भूमिति प्रमाणांत आहेत, तेव्हां आद्यंतांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकारा बरोबर आहे, अथवा दोन युग्मांचें गुणोत्तर बरोबर आहे. जसें ६:४::१२:८ एथें ६×८ = ४×१२ = ४८ अथवा $\frac{६}{४}=\frac{१२}{८}$

यावरून दोन मध्य पदांचे गुणाकारास आदिपदानें भागिलें असतां, अंत पद निघेल.+

+ त्रैराशिकाला हाच सिद्धांत आधार आहे

दुसरा सिद्धांत. कोणते ही दोन गुणाकार बराबर असतील, तर त्यांचे गुण्य गुणक अवयवां पासून एक प्रमाण करितां येईल. जसें ३६=३६ हे दोन गुणाकार आहेत, यांचे गुण्य गुणक अवयव १२×३ अथवा ६×६ अथवा ९×४ इत्यादि यास्तव १२ : ६ :: ६ : ३ अ० १२ : ९ :: ४ : ३

तिसरा सि० कोणते ही दोन संख्यांचें एक भूमिति मध्य प्रमाण दोन संख्यांचे गुणाकाराचें वर्गमूळ आहे. हें वरील सिध्धांताचे प्रथम उदाहरणावरून सिद्ध होतें; जसें, २ आणि १८ यांचे मध्यप्रमाण ६ आहे.

प्रमाणत्व न मोडतां मिळवून, वजा करून, गुणून इत्यादि खालीं लिहिल्या प्रमाणें फेरफार करून, पदें मांडतां येतील. जसें, ८ : ४ :: १० : ५ हे एक प्रमाण आहे.

फेरफार करून	मिळवून व वजा करून	गुणून.
४ : ८ :: ५ : १०	८±४ : ४ :: १०±५ : ५	८×६ : ४ :: १०×६ : ५
५ : ४ :: १० : ८	८±४ : ८ :: १०±५ : १०	८ : ४×७ : १० : ५×७
८ : १० :: ४ : ५		

भागून	वर्गादि करून	मूळ काढून.
$\frac{८}{२}$: ४ :: $\frac{१०}{२}$: ५	$८^{२}$: $४^{२}$ :: $१०^{२}$: $५^{२}$	$८^{\frac{१}{२}}$: $४^{\frac{१}{२}}$ :: $१०^{\frac{१}{२}}$: $५^{\frac{१}{२}}$
८ : $\frac{४}{४}$ :: १० : $\frac{५}{४}$	$८^{३}$: $४^{३}$ :: $१०^{३}$: $५^{३}$	$८^{\frac{१}{३}}$: $४^{\frac{१}{३}}$ :: $१०^{\frac{१}{३}}$: $५^{\frac{१}{३}}$
		अथवा $\sqrt{८}$: $\sqrt{४}$ :: $\sqrt{१०}$: $\sqrt{५}$

याविषयीं पृथक् पृथक् सिद्धांत आदि कारण भूमितींत पहावें.

चवथा सिध्धांत. भूमिति श्रेढीचे दोन शेवट पदांचा भागाकार श्रेढीचे गुणोत्तरास घात प्रकाशक एकोन गच्छ केला, त्या घाता-बराबर आहे; जसें १, २, ४, ८, १६, ३२ यथे $\frac{३२}{१}$ = $२^{५}$

याची सत्यता बीजरुपानें लिहितों. कोणते ही श्रेढीचें प्रथम पद (अ) गुणोत्तर

पांचवा सिद्धांत. भूमिति श्रेढीचे दोन शेवट पदांची वजाबाकी एकोन गुणोत्तराने भागावी, नंतर त्या भागाकारांत अति मोठें पद मिळवावें-ती बेरीज सर्व धन झालें. जसें आदि २ अंत ४८६ गुणोत्तर ३ यां पासून सर्व धन काढ.

$\frac{४८६-२}{२}$ + ४८६ = ७२८ सर्वधन हें उत्तर.

कृत्यें.

(१) कोणते ही दोन पदां पासून एक भूमिति मध्य प्रमाण काढावयाचें.

रीति. तिसरे सिद्धांता प्रमाणें

उदाहरणें.

(१) ४ आणि १६ यांचें भूमिति-मध्य प्रमाण काढ.

४×१६=६४ आणि $\sqrt{६४}$=८ उत्त.

(२) ९ आणि ८१ यांचें भूमिति मध्य प्रमाण काढ.

उत्तर, २७

(२) कोणत्या ही दोन पदां पासून हावीं तितकीं भूमिति मध्य प्रमाणें काढावयाचा.

रीति.** मोठे पदास लहान पदानें भागावें, नंतर मध्य प्रमाणें जित

त्तर (र) आणि गच्छ (न) आहे ती श्रेढी याप्रमाणें होईल. अ, अर, अर^{२}, अर^{३}, अर^{४}, , , इ. अर$^{न-१}$ यांत शेवटील पद, अर$^{न-१}$ आहे तेव्हां आद्यंतांचा भागाकार र$^{न-१}$ आहे यावरून उघड आहे कीं, दोन शेवटील पदांचा भागाकार श्रेढीचें गुणोत्तरास घात प्रकाशक एकोन गच्छ केला त्याचे बरोबर आहे.

+ याची सिद्धता या पुस्तकाचे तिसरे भागीं भूमिती श्रेढींत आहे ती पहा.

** वरचे टिपेंत घेतलेली श्रेढी पुनः घे. अ, अर, अर^{२}, अर^{३}, अर^{४}, , , इ. अर$^{न-१}$ यांत आदि अंतांचा भागाकार र$^{न-१}$ आहे आतां या श्रेढीचा गच्छ न आहे म्हणून मध्य गच्छ (न-२) आणि एकाधिक मध्य गच्छ (न-१) आहे तेव्हां र$^{न-१}$

कीं, ह्मावी ती संख्या एकाधिक करून, त्या भागाकाराचें तितकें घातमूळ काढावें; तें श्रेढीचें गुणोत्तर झालें त्यानें लहान पदास पुनःपुनः गुणित चलावें, अथवा मोठे पदास भागित चलावें; म्हणजे मध्यप्रमाणें निघतील.

उदाहरण.

२ आणि ४८६ यांपासून चार भूमिति मध्यप्रमाणें काढ.

$(\frac{४८६}{२})^{\frac{१}{५}}$ = ३ हें गुणोत्तर; २×३ = ६×३ = १८×३ = ५४×३ = १६२

अथवा ४८६ ÷ ३ = १६२ ÷ ३ = ५४ ÷ ३ = १८ ÷ ३ = ६

उत्तर, ६, १८, ५४, १६२, भू. म.

सर्कतवांटणी.

सर्कत वांटणी ह्मणजे पैका, सामान, जमीन, अथवा कांहीं विषम भागाचें जे विभागी त्यांचें एकत्र आहे, त्यांस तें विभागा प्रमाणें वांटून देणें.+

सर्कत दोन प्रकारची आहे, एकेरी आणि दुहेरी.

जेव्हां प्रत्येक भाग केवळ कोणते ही एक संख्येशीं किंवा वस्तूशीं प्रमाणांत आहे, ह्मणजे ते भाग एकच वेळेस कामास लाविले आहेत, तेव्हां एकेरी; आणि जेव्हां प्रत्येक भाग दोन किंवा अधिक संख्यांशीं

याचें (२४३) इतकें घातमूळ काढिलें असतां ३ (गुणोत्तर) निघतें. यावरून उघड आहे कीं, मध्यपदें जितकीं पाहिजेत ती संख्या एकाधिक करून, आद्यंतांचे भागाकाराचें तितकें घातमूळ काढावें ह्मणजे तें श्रेढीचें गुणोत्तर होईल.

+ सर्कतवांटणीस व्यापारांत कोणी दामावाटें असें ह्मणतात.

प्रमाणांत आहे, ह्मणजे ते विभाग भिन्न भिन्न वेळां कामास लाविले आहेत; तेव्हां तीस दुहेरी सर्कत ह्मणावें.

एकेरी सर्कत.

रीति.

सर्व भागांची बेरीज घ्यावी, नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या. जसें सर्व भागांची बेरीज, त्यांतील एकेक भागास; तसें वाटावयाचे सर्व राशीस, त्या त्या भागाची किंमत, अथवा सगळें मुद्दल (भांडवल) एकेक हिश्यास, तसा सर्व नफा किंवा तोटा, त्याचे त्याचे हिश्यास.

उदाहरणें.

(१) एक गलबत समुद्रांत बुडालें ते माल सुद्धां १०००० रुपये किमतीचें होतें त्यांत डचे $\frac{३}{२५}$, अचे $\frac{८}{२५}$, बचे $\frac{९}{२५}$, आणि कचे $\frac{५}{२५}$ या प्रमाणें विभाग होते, तेव्हां प्रत्येकास किती किती रुपये नुकसान झालें.

$\frac{३}{२५}+\frac{८}{२५}+\frac{९}{२५}+\frac{५}{२५}=\frac{२५}{२५}$

$\frac{२५}{२५}:\frac{३}{२५}::१००००:१२००$	उत्तर	डला नुकसान १२०० रुपये
$\frac{२५}{२५}:\frac{८}{२५}::१००००:३२००$		अला नुकसान ३२०० रुपये.
$\frac{२५}{२५}:\frac{९}{२५}::१००००:३६००$		बला नुकसान ३६०० रु०
$\frac{२५}{२५}:\frac{५}{२५}::१००००:२०००$		कला नुकसान २००० रु०

(२) तीन गांवांमध्यें ३२ विघे ६ पांड जमीन ओसाड आहे, ती त्यातीन गांवांस जमाबंदी प्रमाणें वांटून देण्याचा सरकारचा ठराव झाला. त्या तीन गांवांची जमाबंदी येणें प्रमाणें. प्र० ४६८ रु० ६ आ०, दु० ७१२ रु०, ति० १०१६ रु० १० आणे आहे, तेव्हां कोण कोणते गांवाकडे किती किती जमिन यावी?

		वि०	पा०	का०	
उत्तर.	प्रथम गांवाकडे	५	१	१९	४६२/२११७
	दुसऱ्या गांवाकडे	७	१२	९	१२४७/२११७
	तिसऱ्या गांवाकडे	१९	११	११	१२८८/२११७

दुहेरीसर्कत.

रीति.

प्रत्येक मनुष्यानें मांडवल त्याचे त्याचे मुदतीनें गुणावें. नंतर त्या सर्व गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. मग या प्रमाणें राशी कराव्या. जसें सर्व गुणाकारांची बेरीज, त्याचे त्याचे गुणाकारास; तसें तो नफा किंवा तोटा किंवा जें कांहीं वाटावयाचें आहे तें, त्याचे त्याचे विभागास.

उदाहरणें.

(१) कांहीं एक काम अ, ब, क हे प्रत्येकी अनुक्रमें ८, १२, १६ दिवसांत करितात. पुढें त्याच असामींनीं दुसरें एक काम करून १६ रुपये मिळविले, तेव्हां ते प्रत्येकानें किती किती रुपये घ्यावे. जर त्या कामांत अचे दररोज ६ तास प्रमाणें ९ दिवस, बचे ८ तास प्रमाणें १२ दिवस कचे १० तास प्रमाणें १५ दिवस लागले होते.

यांत प्रथम संकेता प्रमाणें क कांहीं वेळांत एक पट काम करितो, तर ब तितकेच वेळांत ३/२ पट करील आणि अ दुप्पट करील याजकरितां.

२ × ६/८ × ९ = २७   ७४ : २७ :: १६ : रु. ४ .. आ. ९ .. पै. ६ $\frac{२२}{७४}$ अचे

३/२ × ८/८ × १२ = २२   ७४ : २२ :: १६ : ४ .. ७ .. १ $\frac{२६}{७४}$ बचे

१ × १०/८ × १५ = २५   ७४ : २५ :: १६ : ५ .. १५ .. २ $\frac{२५}{७४}$ कचे

(२) तिशी दिनमान असतां दहा असामी आठ दिवस कांहीं काम

करीत होते आणि बाकी राहिलेलें काम बत्तिशी दिनमान झाल्या वर त्या दाहा असामी पैकीं आठ असामीनीं पांच दिवसांत पुरे केलें जर त्या असामीस दररोज जेवण खाण व विश्रांति याकरितां दोन तास मोकळीक द्यावी लागत होती, तर तिशी दिनमानांत किती काम झालें व बत्तिशी दिनमानांत किती काम झाले.

तिशी दिनमान बत्तिशी दिनमान

उत्तर. $\frac{५०}{७७}$, $\frac{३७}{७७}$ काम.

(२) अ, ब, क या त्रिवर्गांनीं सर्कतीनें एक व्यापार आरंभिला, त्यांत भांडवल अनें आरंभीं २५ रुपये दिले, नंतर आठ दिवसांनीं २४ रुपये दिले, पुढें तीन दिवस जाऊन ३८ रुपये दिले, तसें बनें आरंभीं १५ रुपये दिले, पुढें सात दिवसांनीं १२ रुपये दिले, पुढें पंधरा दिवसांनीं १८ रुपये परत घेतले, तसें कनें तेरा दिवस गेल्यानंतर ५० रुपये दिले या प्रमाणें तो व्यापार अठ्ठावीस दिवस चालला त्यांत १०० रुपये नफा मिळाला तो प्रत्येकानें किती किती घ्यावा?

उत्तर.		रु.	आ.	पै.	
	अनें घ्या.	५८	१२	१०	$\frac{७८}{२९७}$
	बनें.	१८	४	५	$\frac{१४७}{२९७}$
	कनें.	२३	०	६	$\frac{३०९}{२९७}$

वर्गघनादिकांचा सहायानें-

चक्रवाढव्याज.

प्रथमरीति. एक रुपयाचें एक मुदतीचें व्याज करून त्यांत तो एक रुपया मिळवावा; नंतर त्या रासीचा मुदतीचे संख्ये इतका घात

करून त्यास मुदलानें गुणावें, तो गुणाकार व्याज मुद्दल, रास होईल. इच्छा असल्यास त्यांत मुद्दल वजा करावें म्हणजे बाकी राहील तें व्याज होईल.

उदाहरणें.

(१) दरसाल दर शेंकडा १२रु॰ प्रमाणें १२५ रुपयांचें दोन वर्षांचें चक्रवाढ व्याज किती होईल? मुदत सहा सहा महिन्याची.

रु॰ १०० : १२ } १
म १२ : ६ }

$\frac{१२ \times ६ \times १}{१०० \times १२} = \cdot०६$

१·०६ ही एक मुदतीची एक रुपयाची रास

$(१\cdot०६)^{४} = १\cdot२६२४७६९६$ चतु॰

$१\cdot२६२४७६९६ \times १२५ = १५७\cdot८०९६२$

$१५७\cdot८०९६२ - १२५ = ३२\cdot८०९६२$

	रु॰	आ॰	पै॰	
उत्तर.	१५७	१२	११·४४७०४	रास.
	३२	१२	११·४४७०४	व्याज

(२) ५०० रुपये मुद्दल व्याज दरसाल दर शेंकडा ५ रुपये प्रमाणें वर्षें पांच झालीं, मुदत अर्ध अर्ध वर्षाची, तेव्हां दहा मुदती झाल्या त्यांची रास काय होईल?

	रु॰	आ॰	पै॰
उत्तर	६४०	०	८

दुसरीरीति. प्रथम रीती प्रमाणें एक रुपयाची एक मुदतीची रास करून तिचा मुदती संख्ये इतका घात कोष्टकांतून घ्यावा, आणि त्यास मुदलानें गुणावें, गुणाकार व्याज मुद्दल, रास होईल.

उदाहरण.

(१) २६० रुपये मुद्दल, व्याजाचा दर दरसाल दर शेंकडा ४½ रुपये प्रमाणें पांच वर्षांची रास काय होईल?

एथें ४½ रुप ये व्याजाप्रमाणें पंच घात कोष्टकातून घेऊन, त्यास मुदलानें गुणून गुणाकार २२५.०१२०

रु. आ. पै.

उत्तर, २२५ .. ० .. २.२०४

व्याजाचे घातकोष्टक.

यांत खालीं लिहिले दरानें एक रुपयाची प्रथम मुदतीस रास होते तिचे २० वर्षे पर्यंत घात लिहिले आहेत.

वर्षे	३	३½	४	४½	५	६
१	१.०३००	१.०३५०	१.०४००	१.०४५०	१.०५००	१.०६००
२	१.०६०९	१.०७१२	१.०८१६	१.०९२०	१.१०२५	१.१२३६
३	१.०९२७	१.१०८७	१.१२४९	१.१४१२	१.१५७६	१.१९१०
४	१.१२५५	१.१४७५	१.१६९९	१.१९२५	१.२१५५	१.२६२५
५	१.१५९३	१.१८७७	१.२१६७	१.२४६२	१.२७६३	१.३३८२
६	१.१९४१	१.२२९३	१.२६५३	१.३०२३	१.३४०१	१.४१८५
७	१.२२९९	१.२७२३	१.३१५९	१.३६०९	१.४०७१	१.५०३६
८	१.२६६८	१.३१६८	१.३६८६	१.४२२१	१.४७७५	१.५९३८
९	१.३०४८	१.३६२९	१.४२३३	१.४८६१	१.५५१३	१.६८९५
१०	१.३४३९	१.४१०६	१.४८०२	१.५५३०	१.६२८९	१.७९०८
११	१.३८४२	१.४६००	१.५३९५	१.६२२९	१.७१०३	१.८९८३
१२	१.४२५८	१.५१११	१.६०१०	१.६९५९	१.७९५९	२.०१२२
१३	१.४६८५	१.५६४०	१.६६५१	१.७७२२	१.८८५६	२.१३२९
१४	१.५१२६	१.६१८७	१.७३१७	१.८५१९	१.९७९९	२.२६०९
१५	१.५५८०	१.६७५३	१.८००९	१.९३५३	२.०७८९	२.३९६६
१६	१.६०४७	१.७३४०	१.८७३०	२.०२२४	२.१८२९	२.५४०४
१७	१.६५२८	१.७९४७	१.९४७९	२.११३४	२.२९२०	२.६९२८
१८	१.७०२४	१.८५७५	२.०२५८	२.२०८५	२.४०६६	२.८५४३
१९	१.७५३५	१.९२२५	२.१०६८	२.३०७९	२.५२७०	३.०२५६
२०	१.८०६१	१.९८९८	२.१९११	२.४११७	२.६५३३	३.२०७१

मिश्रगणित.

मिश्रगणित ह्मणजे वेगळाले जातीचे रूढ पदार्थ एकत्र केले असतां त्या मिश्राचा भाव काढण्याचा एक गणित प्रकार आहे.

मिश्र गणिताचे दोन प्रकार आहेत, मध्यमिश्रगणित आणि व्युत्क्रम मिश्रगणित.

मध्यमिश्रगणित.

प्रत्येक रूढ पदार्थांचे भाव आणि परिमाणे सांगितलीं आहेत त्यांपासून मिश्राचा भाव काढणें.

रीति. प्रत्येक रूढ पदार्थांची परिमाणें त्याचे त्याचे भावांनीं गुणावीं आणि त्या गुणाकारांचे बेरजेस परिमाणाचे बेरजेनें भागावें भागाकार येईल तो मिश्राचा भाव होईल.

उदाहरणें.

(१) १५, १६, १८ रुपये तोळा या दरानें १२, २०, २८ तोळे सोनें मिश्र केलें असतां त्याचा भाव काय होईल?

१५×१२ = १८०
१६×२० = ३२०
१८×२८ = ५०४

रु० आ० पै
६०) १००४ (१६..११..८ $\frac{४}{५}$ उ०

(२) एक मनुष्यानें ५ मण काकवी दर मणी २ रु० म० घेऊन त्यांत ३ मण पाणी घातलें आणि त्यांत ६ रु० मण दराची राब ४ मण घातली तेव्हां त्या मिश्रास भाव काय लागेल?

उत्तर रु० २..आ० १२..पै० ६ $\frac{६}{७}$

+ मिश्रगणित हे त्रैराशिकाचाच एक भाग आहे, कारण रूढ पदार्थांचे परिमाणांचे बेरजेस जर परिमाणाचें एकतर रूढपदार्थांचे एकंदर किमतीस, त्या एकाची किंमत.

व्युत्क्रम मिश्र गणित.

अनेक भावांचे शुद्ध पदार्थ मिश्र करावयाचे, जास सांगितला भाव व्हावा, तर कोणत्या परिमाणानें मिश्र करावें, तें काढण्याची रीति. ही रीति मध्य मिश्र गणिताच्या उलट आहे.

प्रथम रीति.

शुद्ध पदार्थांचे भाव एकाखालीं एक येतील, असे अनुक्रमानें लिहावे. आणि त्याचे डावे बाजूस मध्यें { असें चिन्ह करून, मिश्र भाव लिहावा. आणि शुद्ध पदार्थांचे पुढें उभी ओळ काढावी. अथवा मिश्र भावाहून जे शुद्ध पदार्थांचे भाव उणें असतील. त्यांस अधिकाशी आणि अधिक असतील त्यांस उण्याशीं अखंड रेघ करून जोडावे.

इच्छिले मिश्र भावाहून जे शुद्ध भाव, उणें असतील, त्यांचा प्रत्येकीं वजाबाक्या जे अधिक असतील, त्यासमोर मांडाव्या. आणि मिश्र भावाहून जे अधिक असतील, त्यांचा प्रत्येकीं वजाबाक्या उणें असतील त्यांसमोर मांडाव्या.* आणि त्यांचा बेरजा घ्याव्या. तीं त्या मिश्रांतील शुद्ध पदार्थांचीं परिमाणें.

---

* या रीतीची सत्यता उघड आहे कीं, मिश्र भाव लागण्यास एका अधिक भावाचे शुद्ध पदार्थांत जितका तोटा तितकाच एका उणे भावाचे शुद्ध पदार्थांत नफा झाला पाहिजे. जसें १२ आणि १८ रुपये दराचें सोनें मिश्र करून १५ रुपयानीं विकावयाचें आहे, तर रीती प्रमाणें. १५ {१२ | ३ १८ | ३ म्हणजे १८ दराचे २ तोळे १५नीं विकलें त्यांत ६ रुपये तोटा झाला; परंतु १२चे दराचे २ तोळे १५नीं विकले त्यांत ६ रुपये नफा झाला. तेव्हां प्रत्येक अधिक उण्या भावांत नफ्या इतका तोटा हेंच याचें आदिकरण आहे.

उदाहरणें.

(१) १४, १६, १८, २२ रुपये दरांचें सोनें एकत्र आटून २० रुपये दरानें विकावयास इच्छितो तर कोणकोणत्ये दराचें किती किती मिश्र करावें.

		तोळे.
२०	१४	२
	१६	२
	१८	२
	२२	६+४+२=१२

अथवा

		तोळे.
२०	१४	२..१४चे दराचें
	१६	२..१६चे.
	१८	२..१८चे.
	२२	६+४+२=१२..२२चे.

उ.

(२) कोणी एक दुकानदार दर बुशिल २ शिलिंग ६ पेन्स, ३ शिलिंग ८ पेन्स, ४ शिलिंग, आणि ४ शिलिंग ८ पेन्स असे चार भावाचे गहूं एकत्र मिश्र करून दर बुशिल ३ शिलिंग १० पेन्स या भावानें विकावयास इच्छितो, तर त्याणें मिश्र करावयास कोण कोणते गहूं किती किती परिमाणानें घ्यावे?

उत्तर २ शि० ६ पे० दराचे २ बु०, ३ शि० ८ पे० द० २ बु०
४ शि० द० २ बु०, ४ शि० ८ पे० द० ३ बु०

दुसरी रीति.

जेव्हां मिश्राचें परिमाण सांगितलें आहे तेव्हां पूर्व रीती प्रमाणें मिश्राचीं परिमाणें काढावीं, नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या.

मिश्राचे परिमाणाची बेरजेस, जर त्यांतील एकेक मिश्राचें परिमाण; तर सांगितले परिमाणास, त्याजातीचें नवें परिमाण.

उदाहरणें.

(१) ४, ६, ८, ९ रुपये पल्ला दराचे तांदुळ ४२ पल्ले एकत्र मिश्र करून

७½ दरानें विकावयास इच्छितो तर कोणते जातीचे किती किती तांदुळ घ्यावे?

पल्ले.

७½ { ४ | १½ ७ : १½ :: ४२ : ९
५ | ½ ७ : ½ :: ४२ : ३
८ | १½ ७ : १½ :: ४२ : ९
९ | ३½ ७ : ३½ :: ४२ : २१ }
(३½ / ७)

अ. ७½ { ४, ५, ८, ९ }

पल्ले.

१½ + ½ = २ १४ : २ :: ४२ : ६
१½ + ½ = २ १४ : २ :: ४२ : ६
१½ + ३½ = ५ १४ : ५ :: ४२ : १५
१½ + ३½ = ५ / १४ १४ : ५ :: ४२ : १५
} ५०

(२) १५, १७, १८½, १९ रुपये तोळा दराचें सोनें मिश्र करून १८ रुपया नीं तोळा विकावयाचें; परंतु तें मिश्र ४० तोळे व्हावें तर प्रत्येक जातीचें किती किती तोळे मिश्र करावें?

तोळे.+

१८ { १५, १७, १८½, १९ }

१ + ½ = १½ ११ : १½ :: ४० : ५ ५/११
१ + ½ = १½ ११ : १½ :: ४० : ५ ५/११
३ + १ = ४ ११ : ४ :: ४० : १४ ६/११
३ + १ = ४ / ११ ११ : ४ :: ४० : १४ ६/११
} उत्तर.

(३) एक मनुष्यानें एका सावकाराचें १००० रुपये कर्ज देणे होतें तें देते वेळीं त्या कर्जदारानें कांहीं मोहोरा व कांहीं पुतळ्या मिळून ८६ नग दिले तेवढ्यानें त्याचें कर्ज फिटलें यावरून मोहोरा व पुतळ्या किती हो त्या तें सांगा? मोहोरेचा दर १५ रु० व पुतळीचा दर ५ रुपये आहे.

उत्तर मोहोरा ५७, पुतळ्या २९

+ यास्थळीं धातूंचे स्वभावावर अनेक प्रश्न सांगतां येतील, परंतु त्यांतून बहु चम त्कारिक एकच प्रश्न पुरे.

हैइरो या नामें सेराक्युसचा पातशाह होता त्यानें, सगळा शुद्ध सोन्याचा मुकुट सो नारास करावयास सांगितला, नंतर तो त्यानें करून आणिल्यावर त्यांत कांहीं रुपें किं वा तांबें मिश्र केलें असें नजरेस आलें; परंतु तें किती याचा निश्चय व्हावा म्हणून आर्कि मीदीज या नामें एक चतुर पुरुष अति प्रसिद्ध तो ही तेथें होता, तेव्हां त्या मुकुटांतील हिणा

तिसरीरीति.

जेव्हां एक शुद्ध पदार्थाचें परिमाण अमुक असावें असें सांगितलें आहे तेव्हां प्रथम रीती प्रमाणें मिश्राचीं परिमाणें काढून, नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या. असें सांगितलें परिमाणाचें शुद्ध पदार्थाची बजावाकी दुसरे वेगवेगळे शुद्ध पदार्थांचे बजावाक्यांस, तर सांगितलें परिमाण वेगवेगळे इच्छिलें परिमाणास होईल.

उदाहरणें.

(१) एका वाण्यानें ३ पैसे शेर दराचें काकवी ६ पैसे शेर दराचा मध आणि पाणी मिश्र करून ५½ पैसे शेर प्रमाणें विकलें. त्यांत पाणी २० शेर होतें तेव्हां मध आणि काकवी किती किती होतीं?

$५\frac{१}{२}\begin{cases}०\\३\\६\end{cases}$

$५\frac{१}{२}+२\frac{१}{२}=७\frac{१}{२}$

$\frac{१}{२}:\frac{१}{२}::२०:२०$ मध
$\frac{१}{२}:७\frac{१}{२}::२०:३००$ काकवी } उत्तर.

चें परिमाण काढायास तो त्या चतुर पुरुषाजवळ दिल्हा पुढें.

त्यानें एक शुद्ध सोन्याची, एक तांबें किंवा रुपें याची अशा दोन भरींव आकृती करून त्या पाण्यानें तोंड पर्यंत भरलेले पात्रांत पर्यायानें बुडविल्या, नंतर त्या आकृतीच्या योगें पात्रांतून बाहेर पडलें पाण्याची तोलें केल्या पासून त्या भरींव आकृतीचें स्वभार त्यास विदित झाले, म्हणजे या पासून आणि त्या प्रत्येकांचे सांगितले वजना पासून त्या मुकुटांत शुद्ध सोनें आणि हीण किती होतें याचें परिमाण काढितां आलें.

आतां कल्पना करकी, त्या भरींव आकृति व मुकुट यांचें प्रत्येक वजन १० शेर आहे. आणि शुद्ध रुपें किंवा तांबें याचे भरींवाकृती मुकुट सुद्धें पात्रांतून बाहेर पडलें पाणी १२ शेर आणि शुद्ध सोन्याचे भरींवाकृति मुकुट सुद्धें पात्रांतून बाहेर पडलें पाणी ५२ शेर, आणि त्या मिश्र सोन्याचे मुकुट सुद्धें पात्रांतून बाहेर पडलें पाणी ६४ शेर, तर त्या मुकुटांतील शुद्ध सोनें आणि हीण याचें प्रत्येक परिमाण काय होईल.

आतां केवळ तांबें किंवा रुपें याचा भाग ९२ शुद्ध सोन्याचा ५२ आणि मिश्राचा ६४ आहे. याजकरितां ६४ $\begin{cases}५२\\९२\end{cases}$ २८ १२ आणि यांची बेरीज म्हणजे १२+२८=४० परंतु ही १० ची याजकरितां रीती प्रमाणें ४० : १० :: १२ : ३ शेर तांबें
४० : १० :: २८ : ७ शेर शुद्ध सोनें } हें उत्तर.

(२) एक चितारी दर पानास २ पैसे प्रमाणें गंजिफांचीं ४० पानें आणि दर पानास २ पैसे प्रमाणें गंजिफांचीं कांहीं पानें एकत्र करून, १ पानास २१ पैसे प्रमाणें विकणार; तेव्हां त्याणें दोन पैसे दराचीं किती पानें घ्यावीं?

उत्तर ८० पानें.

इष्टराशि.

जा प्रश्नांचीं उत्तरें पूर्व रीतींनीं निघत नाहींत, त्यांचीं उत्तरें कल्पित् संख्यांचे आधारानें काढण्याचा एक मार्ग आहे, त्यास इष्टराशि अथवा मिथ्या मनोधृत, अथवा तुक शोध असें ह्मणतात.

इष्टराशि दोन प्रकारची आहे. एकेरी आणि दुहेरी.

जेव्हां किती एक प्रश्नांचीं उत्तरें एकच कल्पित् संख्येचे आधारानें निघतात. ह्मणजे इच्छिले संख्येस दुसरे कोणते ही संख्येनें गुणिलें किंवा भागिलें अथवा इच्छिली संख्या तिचे तीच अथवा तिचे कोणते ही भागानें अधिक किंवा उणी केली, तेव्हां तीस एकेरी इष्टराशि ह्मणावें; आणि जा प्रश्नांचीं उत्तरें दोन कल्पित् संख्यांचे आधारानें निघतात ह्मणजे विवक्षित संख्या दुसरे कोणते ही संख्येंत मिळविली किंवा वजा केली; परंतु ती संख्या सत्य संख्येशीं कोणत्या प्रमाणानें आहे हें गळक नाहीं. अशाजातीचे प्रश्न जींत येतात तिला दुहेरी इष्टराशि ह्मणावें.

एकेरी इष्टराशि.

रीति.

इच्छिली संख्या काढावया साठीं कोणती ही संख्या घ्यावी, आणि प्रश्नांत सांगितल्या प्रमाणें तिशीं कृति करावी नंतर या प्रमाणें त्रैराशीक रच्या. जसें कल्पित संख्येचें उत्पन्नास जर सत्य संख्येचें उत्पन्न तर, कल्पित् संख्येस सत्य संख्या होईल.+

उदाहरणें.

(१) एक मनुष्यानें आपलें द्रव्य तीन पुत्रांस वांटून दिलें तें असें कीं, प्रथमास १/३ दुसऱ्यास १/४ तिसऱ्यास १/५ तथापि त्याचे जवळ ६५० रुपये शिल्लक राहिले यावरून त्याचें सर्व द्रव्य कितीं व प्रत्येकास किती किती दिलें?

पहिलें द्रव्य ६००० रुपये अशी कल्पित् संख्या घे. आतां ६००० चा १/३ = २०००, १/४ = १५०० आणि १/५ = १२०० मिळून तिघांचे हिशाची बेरीज ४७०० ही ६००० पांतून वजा करून १३०० बाकी राहिले तेव्हां.

१३०० : ६५० :: ६००० : ३००० हें सर्व द्रव्य.

३००० × १/३ = १००० प्रथम पुत्रास.
३००० × १/४ = ७५० दुसरे पुत्रास. } हें उत्तर.
३००० × १/५ = ६०० तिसरे पुत्रास.

(२) बाजारांत एक पैशाचीं पानें ८०, एक पैशाच्या सुपाऱ्या १२ आणि एक पैशाचा लवंगा २०० या प्रमाणें मिळतात, तेव्हां कोणीं एकानें आपले चाकरास सांगितलें कीं, एक पैशांत सुपाऱ्यांचा दुप्पट पानें आ-

---

+ या रीतीचें कारण उघड आहे कीं, उत्पन्नें आपल्याले संख्यांशीं प्रमाणांत आहेत. जसें न अ : अ :: न द : द, अथवा अ/न : अ :: द/न : द. किंवा अ/न + अ/न इत्यादि : अ :: द/न + द/न द, आणि इत्यादि

णि पानाचा दुप्पट लंवगा घेऊन ये तेव्हां क्रमाच्या, पानें आणि लंवगा

किती किती येतील.

उत्तर, क्रमाच्या ७ $\frac{१२}{२८}$, पानें १४ $\frac{२५}{२८}$, लंवगा २९ $\frac{११}{२८}$

दुहेरी इष्टराशि.

प्रथम रीति.+ क्रमांराने कामाचे उपयोगी दोन कल्पित संख्या घ्या

व्या आणि त्यांचीं प्रश्नाचे संकेता प्रमाणें वेगळालीं कामे करावीं. या

दोन संख्या पासून जीं दोन उत्पन्नें होतील त्यांत आणि सत्य संख्ये

चे उत्पन्नांत जें अंतर असेल तें अधिक उणें चिन्हानें युक्त करून

पृथक् पृथक् लिहावें. नंतर प्रथम अंतरानें दुसरी संख्या व दुसरे

अंतरानें प्रथम संख्या गुणावी. आणि अंतरांचीं चिन्हे सरूप आ

हेत तर गुणाकारांचे वजावाकीला अंतरांचे वजावाकीनें भागावें

आणि चिन्हे विरूप आहेत तर गुणाकारांचे बेरजेला अंतरांचे बे

रजेनें भागावें भागाकार येईल ती सत्य संख्या होईल.

+ सिद्धांत, या रीतीस आश्रय हा आहे कीं, प्रथम अंतर दुसरे अंतरास आहे जशी प्रथम मिथ्या संख्या आणि सत्य संख्या यांची वजावाकी, दुसरी मिथ्या संख्या आणि सत्य संख्या यांचे वजावाकीस आहे, जेव्हां अशा प्रमाणांत ना होत, तेव्हां या रीतीनें उत्तर बरोबर काढितां येत नाहीं ही रीति खरी आहे असें पूर्व आश्रयावरून दाखवितों.

अ आणि ब हीं दोन अक्षर चिन्हें घेतले संख्यांचीं असतील. तसें आ आणि बा हीं त्यां चीं प्रश्नाचे संकेता प्रमाणें उत्पन्नें असतील, तसें र आणि स हीं त्यांचीं अंतरें असतील, म्हणजे न हें संकेताचें सत्य उत्पन्न. याचीं वेगळाल्या आ आणि बा यांचा वजावाकी, र आणि स असतील, आणि इष्ट संख्या दाखवायास क्ष घेतला, म्हणजे क्षचें उत्पन्न न होईल.

तेव्हां न-आ = र आणि न-बा = स अथवा बा-आ = र-स आतां जास या रीतीचा आश्रय आहे, त्या प्रमाणा प्रमाणें र : स :: क्ष-अ : क्ष-ब, अंत्यपदें आणि मध्य पदें गुणून म्हणजे रक्ष-रब = सक्ष-सअ नंतर स्थलांतरानें रक्ष-सक्ष = रब-सअ, भागाकारानें क्ष = $\frac{रब-सअ}{र-स}$ ही वाढिली संख्या आहे, म्हणजे ही रीति तेव्हां आहे कीं, जेव्हां दोन्ही अंतरें कमी पडतात.

उदाहरणें.

(१) अ आणि ब या दोन झाडांवर कांहीं राघू बसले होते, त्यांत अ झाडावरील राघू ब झाडावरील राघूंस ह्मणतात कीं, तुमच्यांतील एक जर आमच्यांत आला. तर तुह्मी व आह्मी बरोबर होऊं. तेव्हां ब झाडावरील ह्मणाले कीं, तुमच्यांतील एक जर आमच्यांत आला तर आह्मी तुमच्या बाकीच्या दुप्पट होऊं. यावरून अ आणि ब या दोन झाडांवर प्रत्येकीं किती किती राघू होते?

आतां मध्य संकेताच्या प्रथम प्रमाणाप्रमाणें अशा मिथ्या संख्या ९, ११ आणि ३, ५ या घेऊन

९ , ११		३ , ५		४×३ = १२
−१ , १		−१ , १		२×९ = १८
८ , १२		२ , ६		४+२ = ६) ३० (५
२ , −१६		−२ , −४		३०
१६ , −४ प्र० अं.		४ , +२ दु० अं.		

उत्तर, प्रथम झाडावर ५, दु० झा० ७

(२) अ आणि ब या दोघांजवळ १२ : १५ या प्रमाणानें रुपये होते, नंतर बनें एक बाग खरेदी करून, २०० रुपये शिल्लक ठेविले आणि अनें त्याच किमतीचा एक बाग घेऊन, २०० रुपये कर्ज केलें. यावरून अ आणि ब यांजवळ रुपये किती होते व बागाची किंमत काय?

जर दोन्ही उत्पन्नें सत्य उत्पन्नाहून अधिक असतील, ह्मणजे आ आणि बा हीं दोन्हीं न हून अधिक असतील, तर न-आ=-र आणि न-बा=-स ह्मणजे र आणि स हीं दोन्हीं (−) ऋण आहेत याजकरितां -र : -स :: क्ष-अ : क्ष-ब, परंतु -र : -स :: +र : +स याजकरितां र : स :: क्ष-अ : क्ष-ब, आणि सर्व बाकी पूर्वप्रकाराप्रमाणें बरोबर निघेल.

परंतु जर एक उत्पन्न आ कमी आणि दुसरें उत्पन्न बा अधिक असेल, अथवा एक अंतर र (+) धन आणि दुसरें अंतर स (−) ऋण असेल तर पूर्वप्रमाणें प्रमाणराशी करून समीकरणास हें रूप होईल. $क्ष = \frac{रब+सअ}{र+स}$ आणि ही रीति अंतरें विरूप आहेत तेव्हां उपयोगी होय.

* चिन्हें सरूप ह्मणजे धन धन किंवा ऋण ऋण.

उत्तर २५०० अजपर्यंत रु० ३००० , बअ० रु० , २००० बागाची किंमत रु०

दुसरी रीति. प्रथम रीती प्रमाणें दोन संख्या पासून दोन अंतरें काढावीं, नंतर घेतल्या दोन संख्यांची वजाबाकी त्यांतील एक अंतरानें गुणावी, आणि त्या गुणाकारास अंतरांचीं चिन्हें सरूप असल्यास त्यांचे वजाबाकीनें आणि विरूप असल्यास बेरजेनें भागावें. अथवा या प्रमाणें त्रैराशिक मांडावें. जसें २ अंतरांची वजाबाकी, त्यांतील एक अंतरास तर दोन संख्यांची वजाबाकी, त्या अंतराचे फळ किती? नंतर ते इच्छाफळ जा संख्येचें अंतर कामांत घेतलें आहे, ती संख्या अधिक असल्यास तींत वजा करावें; आणि कमी असल्यास मिळवावें ह्मणजे सत्य संख्या उत्पन्न होईल+.

उदाहरण.

(१) एक चाकर ३० दिवसांचे करारानें चाकरीस राहिला. त्याचा करार जा दिवशीं तो चांगलें काम करील त्या दिवसाचे त्यास पावणे दोन रुपये द्यावयाचे परंतु जा दिवशीं खेळेल, किंवा कामावर न येईल, त्या दिवसाचा त्याजपासून उलट एक रुपया दंड घ्यावयाचा. पुढें मुदत पुरी झाल्यावर करारा प्रमाणें त्याचे २५ रुपये देणें ठरलें तेव्हां तो किती दिवस कामावर आला होता, व खेळणें वगैरे मिळून किती दिवस गैरहजर होता?

उत्तर, २० दिवस कामावर होता. १० दि० खे० वगै०

\+ म्हणजे पूर्व आश्रय सांगितला त्याप्रमाणें र:स::क्ष-अ:क्ष-ब, याजकरितां भागाकारानें र:स::ब-अ:क्ष-ब, परंतु बा-आ=र-स याजकरितां बा-आ:स::ब-अ:क्ष-ब, अथवा बा-आ:ब-अ::स:क्ष-ब, ह्मणजे ही दुसरी रीति आहे.

अनुक्रमणिका

भाग २

विषय.	पृष्ठ.
व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाठी.	१
मिळवणी.	४
वजाबाकी.	५
गुणाकार.	६
भागाकार.	८
अपूर्णबीज.	१०
बीजवर्गघनादि	१५
बीजवर्गघनादिमूळ.	१८
करणी.	२१
गणित प्रमाण आणि श्रेढी.	३१

विषय.	पृष्ठ.
गोळ्यांचे राशींचें गणित.	३२
भूमिति प्रमाण आणि श्रेढी.	४२
समीकरण.	४५
एकवर्णसमीकरण.	४८
वर्गसमीकरण.	५०
घनादि समीकरण.	६९
व्याज.	७४
सरळव्याज.	७५
चक्रवाढव्याज.	७५
प्राप्ति.	७६
अनंतश्रेणी.	७८

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

गणितसार.

भाग तिसरा.

बीजगणित.

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाठी

१ बीजगणित ह्मणजे हरएक संख्येचे अंकांवांचून अक्षर चिन्हें करून गणित करण्याची विद्या. ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे.

२ या विद्येमध्यें सर्व पदार्थजातीचे संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात, आणि त्यां संगतीं मिळवणी, वजाबाकी इत्यादि जीं कामें करायाचीं तीं स्वल्परूप कार्यप्रकाशक चिन्हें करून करितात.

३ बीजगणितांत कित्येक पदें व्यक्त ह्मणजे जांची किंमत ठाऊक आहे; आणि कितीएक पदें अव्यक्त ह्मणजे जांची किंमत ठाऊक नाहीं, अशीं असतात. व्यक्त पदें दाखवायास मूळ लिपीचीं अ, ब, क इ॰ अक्षरें घ्यावीं. आणि अव्यक्त पदें दाखवायास शेवटल्या लिपीचीं क्ष, य, ज्ञ इ॰ अक्षरें घ्यावीं.

४ कामें दाखविणारीं चिन्हें जांस कार्यप्रकाशक चिन्हें ह्मणतात, तींव त्यांचे उपयोग दुसरे भागाचे प्रारंभीं दाखविले आहेत.

५ सरूप पदें ह्मणजे जांचीं अक्षरें आणि वर्गादि एकच आहेत. असें, अ, ४अ क्ष. अक, ५अक इ॰

६ विरूप पदें ह्मणजे जांचीं अक्षरें आणि वर्गादि प्रकाशक भिन्न आहेत. जसें, ५अ, क, क्ष इ॰

७ एकपद अथवा एकाकी पद ह्मणजे ज्यांत एकच रकम आहे. जसें,

६अक अथवा १२अइ.

८ संयुक्तपद ह्मणजे जांत एकाहून अधिक पदें अधिक किंवा उण्याचि न्हानें युक्त आहेत असें, अ+क, अ. २अक+५ब, अ. क्षे+३य-६इ.

९ संयुक्त पदां मध्यें दोन पदें असली ह्मणजे त्यांस द्वियुक्तपद, तीन असलीं ह्मणजे त्रियुक्तपद, चार असलीं ह्मणजे चतुर्युक्त पद इ. ह्मणावें. जसें, द्वि. अ+ब, त्रि. अ+४ब-क्ष, च. अ-ब+कड+क्षे इ.

१० द्वियुक्त पदांत एक पद ऋण असलें ह्मणजे त्यास धनर्ण पद ह्मणावें जसें, अ-ब, अक-ड इ.

११ धन पद ह्मणजे जें अधिक चिन्हानें युक्त आहे. जसें, +अ अथवा +५ब.अ.के इ.

१२ ऋण पद ह्मणजे जें उणें चिन्हानें युक्त आहे. जसें, -अ, -कड अ. -अ इ.

१३ सरूप चिन्हें ह्मणजे सर्व धन किंवा सर्व ऋण आहेत. जसें, ५कड +म+९ अथवा -९स-के-अक इ.

१४ विरूप चिन्हें ह्मणजे कांहीं धन आणि कांहीं ऋण आहेत जसें, अक-के+म इ.

१५ वेळा मकाशक (गुणक) जो पदाचे प्रारंभीं लिहितात. जसें, १२अ, १५कड एथें १२, १५ हे वेळा मकाशक (गुणक) आहेत.

१६ घात मकाशक किंवा घातमूळ मकाशक ह्मणजे काय, तें दुसरे भागीं लिहिलें आहे.

१७ खंडपद अथवा करणी ह्मणजे ज्याचें मूळ पूर्ण येत नाहीं. जसें,

+ जें पद चिन्हावांचून असेल, तें अधिक चिन्हानें युक्त आहे, असें समजावें, परंतु तें प्रारंभीं असलें पाहिजे, नाहींतर गुणक होऊं लागेल.

$\sqrt{५अ}$, $५\sqrt{३}$, $\sqrt[३]{अ^२}$, $\sqrt[न]{अ^म}$ इ॰

१८ अखंड पद म्हणजे जें पद करणी वांचून आहे. जसें, ३अब, ४कड इ॰

१९ पदाचा व्युत्क्रम म्हणजे तें पद उलट लिहिलें अथवा त्या पदानें (१) भागिला. जसें, अ, $\frac{अ}{ब}$ यांचे व्युत्क्रम $\frac{१}{अ}$, $\frac{ब}{अ}$ इ॰

२० जीं अक्षरें एकेक पदाचे संख्या निवेदनार्थ येतात, तीं इच्छेस येतील त्याीं मांडावीं. जसें अ, ब, क यांचा गुणाकार अबक = अकब = बअक = बकअ = कअब = कबअ. याप्रमाणें क+ब+अब−ड = ब+अब−ड+क = अब−ड+क+ब = क−ड+ब+अब, इ॰

यांत बहुतकरून धन रकम असेल ती आरंभीं लिहावी.

वरच्या व्याख्या समजाया करितां कांहीं उदाहरणें लिहितों.

मनांत आण कीं, पुढील उदाहरणांत अ=६, ब=५, क=४, ड=१, ई=० या किमती आहेत.

उदाहरणें.

(१) $२क^२ - ३अब + अ^३$ यांची संख्या काढ.
$३२ - ९० + २१६ = १५८$ हें उत्तर.

(२) $\sqrt{क} - \frac{३अब}{\sqrt{२अक+क^२}}$ यां॰ सं॰ काढ.
$२ - \frac{९०}{\sqrt{६४}} = २ - \frac{९०}{८} = -९\frac{१}{४}$ हें उत्तर.

(३) $\frac{\sqrt{क^५}}{ड} \times \frac{अ^२}{क^२} + \sqrt{(अ^२+ब^क)\cdot ड^२}$ यांची संख्या काढ.
उत्तर १८

(४) $(अ^ई + क^ई) + \sqrt{क}\,\frac{ड}{\sqrt{अक-बक}}$ यांची संख्या काढ.
उत्तर ६

(५) $२क^३ - \frac{ब}{ड}\cdot\sqrt{क^२+३अक\cdot\sqrt{क-३ड}}$ यांची संख्या काढ.
उत्तर २०

(६) $\frac{ब-ई}{क-ई} \times \frac{अ+ब}{क-ड}$ यांची संख्या काढ.
उत्तर १०$\frac{५}{६}$

मिळवणी.

बीजगणितांत मिळवणी तीच होय. पदें सरूप आहेत, तेव्हां त्यांची एक रकम करणें आणि विरुप आहेत तेव्हां त्यांचे त्यांचे चिन्हांनीं युक्त करणें.

पदें व चिन्हें सरूप आणि विरूप यावरून मिळवणीचे तीन प्रकार आहेत.

प्रथमप्रकार.

यांत पदें व चिन्हें सरूप आहेत.

रीति. सर्व वेळा प्रकारांक मिळवून, सरूप पदाचें अक्षर चिन्हत्याचे पुढें लिहावें आणि त्यास सरूप पदाचें चिन्ह जोडावें.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
५अ+७य	७बै-कै	९केक्ष-य	वय+क्ष^{२}
९अ+२य	२बै-३कै	५केक्ष-५य	५वय+७क्ष^{२}
अ+४य	३बै-१०कै	२केक्ष-३य	२वय+९क्ष^{२}
८अ+य	बै-२कै	१४केक्ष-११य	५वय+११क्ष^{२}
२३अ+१४य	१३बै-१६कै	३०केक्ष-२०य	१३वय+२८क्ष^{२} उ०

दुसराप्रकार.

यांत पदें सरूप असून चिन्हें विरूप आहेत.

रीति. सर्व धन वेळा प्रकारांकांची बेरीज घ्यावी व ऋण वेळा प्रकारांकांची बेरीज घ्यावी आणि मोठ्या बेरजेंतून लहान बेरीज वजा करून त्या बाकीस मोठ्या बेरजेचें चिन्ह करावें, आणि त्यापुढें सरूप पद जोडावें.

+ चिन्हा विषयींचें प्रथम प्रकारांत पहा.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
क्ष+य-२अ	११अ^{२}-६अ^{५}-५व^{३}-५	क्ष^{३}+√य+२	$\frac{म}{न}$क्ष^{३}+२य^{२न}
२क्ष-२य+२अ	४अ^{२}+८अ^{५}+२व^{३}-१	-७क्ष^{३}-२√य+५	मक्ष^{३}-मय^{२न}
-क्ष+५य-७अ	१५अ^{२}+४अ^{५}-७व^{३}+१६	२क्ष^{३}+११√य-२	$\frac{म}{न}$क्ष^{३}-नय^{२न}
२क्ष+४य-६अ	-८अ^{२}+६अ^{५}-१०व^{३}+१०	-४क्ष^{३}+१०√य+६	

तिसरा प्रकार.

यांत पदें व चिन्हें विरूप आहेत.

रीति. जीं पदें सरूप असतील तीं पूर्व प्रकाराप्रमाणें एकत्र करावीं. आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे चिन्हानीं जोडून लिहावीं.

उदाहरणें.

(१)
४वक्ष-१५+२क्ष^{२}
५क्ष^{२}+२वक्ष-५क्षय
७+क्षय-२√क्ष
√क्ष+१३-२क्ष^{२}
――――――――
६वक्ष+५+६क्ष^{२}-४क्षय-२√क्ष

(२)
११+अ^{२}-५व
४व+६अ^{२}-२√व
√व-२क^{२}+२
२+७व-२√व
――――――――
१५+अ^{२}+६व-४√व-२क^{२}

(३)
म√य+क्ष^{२}+२अ^{२}
-√य-√क्ष+७व
नम^{२}+२क्ष^{२}-२अ^{२}
――――――――

(४)
(अव)$^{\frac{म}{न}}$+√(अ+क्ष)-१५प^{२}
अ$^{\frac{म}{न}}$+व$^{\frac{म}{न}}$-(अ+क्ष)^{२}+१५प^{२}
――――――――

वजाबाकी.

रीति. ज्या पदा पासून कोणतेंही पद वजा करावयाचें तें प्रथम लिहून

नंतर जें वजा करावयाचें तें त्याचे खालीं लिहावें; परंतु त्यांत सरूपपदें असतील तीं एका खालीं एक येतील अशीं लिहावीं. नंतर खालचे रकमेचीं चिन्हें बदल करून, अथवा केलीं असें मनांत आणून दोन ही रकमांची बेरीज करावी+ ह्मणजे वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
१२क्ष+५$अ^{२}$-७क	५√अक+६य	३$य^{२}$+२√क्षय+५$क्ष^{२}$	$क्ष^{३}$+$य^{म}$+६
९क्ष-३$अ^{२}$+४म	२√अक-५य	४$य^{२}$+६-√क्ष+२$अ^{२}$	$क्ष^{३}$-$य^{२}$+५
३क्ष+८$अ^{२}$-७क-४म	३√अक+११य		

गुणाकार.

गुण्य आणि गुणक यांचीं पदें एकाकी किंवा संयुक्त यावरून याचे अनेक प्रकार आहेत.

प्रथम प्रकार.

ज्यांत गुण्य आणि गुणक दोन्हीं एकाकी आहेत.

रीति. गुण्य आणि गुणक यांचे बेक प्रकाशांक परस्पर गुणून त्या गुणाकाराला दोन्ही रकमांचीं अक्षरें जोडून लिहावीं.

गुण्य आणि गुणक यांचीं चिन्हें सरूप असल्यास गुणाकार धन आणि विरूप असल्यास ऋण++ होतो.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)	(५)

+ चिन्हा विषयीं चे दुसरें प्रकारांत पहा.

++ चि. विषयीं तिसरे प्रकारांत पहा.

५अ	-३अ	११कैड	-५अक्ष	(अ^{३}+क्ष^{३})
७अ	४ब	-२डब	-४म	-३(अ^{३}+क्ष^{३})
३५अअ कि॰ ३५अ^{२}	-१२अब	-२२कैड^{२}ब.	२०अक्षम.	-३(अ^{३}+क्ष^{३})^{२}

दुसराप्रकार.

यांत गुण्य संयुक्त आणि गुणक एकाकी आहेत.

रीति. प्रथम प्रकाराप्रमाणें गुण्याची एकेक रकम गुणकानें वेग ळाली गुणावी. आणि गुणाकार येईल तो एका पुढें एक त्याचे त्याचे चिन्हानें युक्त करून लिहावा.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
७क्ष-५ब	४अक्ष-४ड	अ^{४}-३क+७	क्ष^{म}+य^{२}+१०
३क	११ब	बक	२अबक
२१कक्ष-१५बक	४४अबक्ष-४४बड	अ^{४}बक-३बक^{२}+७बक	

तिसराप्रकार.

यांत गुण्य आणि गुणक दोन्ही संयुक्त आहेत.

रीति. गुणकांतील एकेक पदानें गुण्यास पूर्व प्रकाराप्रमाणें पृ थक् पृथक् गुणावें, गुणाकारास आरंभ डावे कडून करावा आणि गुणाकार लिहिते वेळीं पूर्व ओळीचे डावेकडील एक स्थान सोडून दुसऱ्या ओळीस आरंभ करावा, ह्मणजे सरूप पदें एका खालीं एक येऊन मिळवणीस श्रम पडणार नाहींत.

संयुक्त पदांचा गुणाकार कधीं असा संक्षेप रूपानें लिहावा कीं,

संयुक्त पदें सांकळीत अथवा कौंसांत मांडून, मध्यें गुणाकाराचें चिन्ह करावें.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)
$अ+ब$	$५अक्ष^२+य$	$(अ^२+क्षय+ब)$
$अ+ब$	$४क्ष-२य$	$-(अ^२-अब+ब^२)$
$अ^२+अब$	$२०अक्ष^३+४क्षय$	
$अब+ब^२$	$-१०अक्ष^२य-२य^२$	
$अ^२+२अब+ब^२$	$२०अक्ष^३+४क्षय-१०अक्ष^२य-२य^२$	

(४)	(५)	(६)
$२क्ष^२-८अक्ष+७$	$२क्ष^२+क्ष^२य^२$	$\sqrt{अ^२}+(अ-ब)$
$५क्ष^३+अ-ब^२$	$क्ष^२+य^२$	$अ^२+(अ+ब)$

भागाकार.

भाज्य आणि भाजक एकाकी किंवा संयुक्त असतात यावरून याचे तीन प्रकार आहेत.

प्रथम प्रकार.

ज्यांत भाज्य आणि भाजक एकाकी आहेत.

रीति. अंकगणिताप्रमाणें भाजक भाज्याचे मागें अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीप्रमाणें भाज्याचे खालीं अशा प्रकारें दोन्ही रकमा लिहाव्या. नंतर भाज्य भाजकाचा होईल तेवढा संक्षे-

प्रकरावा. ह्मणजे भागाकार झाला.

भाज्य भाजकांचीं चिन्हें सरूप असल्यास भागाकार धन (+) आणि विरूप असल्यास ऋण (−) होतो.+

उदाहरणें.

(१) ८अक यांस २क यांणीं भाग.

८अक ÷ २क अथवा २क) ८अक

अ॰ $\frac{८अक}{२क}$ = ४अ हें उत्तर

(२) २०क्ष^{२}य यांस ४क्षय यांणीं भाग.

उत्तर ५क्ष.

(३) −१२अ^{३}म^{३} यांस अ^{३}म^{२} यांणीं भाग.

उत्तर $\frac{−१२म}{अ}$

(४) −२क यांस −२क यांणीं भाग.

उत्तर १.

दुसरा प्रकार.

यांत भाज्य संयुक्त आणि भाजक एकाकी आहेत.

रीति. भाज्यांतील सर्व पदें पूर्व प्रकारा प्रमाणें भाजकानें वेगळाळीं भागावीं.

उदाहरणें.

(१) (अ^{२}क + २बक^{२} + क^{३}) ÷ क, अ॰ $\frac{अ^{२}क+२बक^{२}+क^{३}}{क}$ = अ^{२} + २बक + क^{२}.

(२) (२० अ^{२}क्ष + १० अक्ष + ५) ÷ ५अक्ष = ४अ + २ + $\frac{१}{अक्ष}$ हें उत्तर.

(३) ५(अ+क्ष)^{३} ÷ (अ+क्ष) = ५(अ+क्ष)^{२} उत्तर.

(४) ६अबक + १२अबक्ष आणि ९अ^{२}ब यांस अब यांणीं भाग.

तिसरा प्रकार.

यांत भाज्य आणि भाजक दोन्ही संयुक्त आहेत.

रीति. अंक गणित रीतीनें भाज्य भाजक लिहावे. दोहोंत ही-

+ चिन्हां विषयीं चवथे प्रकारांत पहा.

पदें मोठ्या घाता पासून उतरतीं लिहावीं.

भाज्याचें प्रथमपद भाजकाचे प्रथम पदानें प्रथम प्रकाराप्रमाणें भागावें आणि जो भाग लागेल तो भागाकारस्थळीं लिहून त्याणें सर्व भाजक गुणून, गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा. आणि बाकी वर वरचा एक भाग घ्यावा. पुनः पूर्व प्रमाणें भागावें. या प्रमाणें शेवट पर्यंत अंक गणिता प्रमाणें करावें. बाकी राहिल्यास व्यवहारी अपूर्णांकि रीतीनें लिहावी.

उदाहरणें

(१) अक+वक) अ^{3}क^{2}+४अ^{2}वक^{2}+४अव^{2}क^{2}+व^{3}क^{2} (अ^{2}क+३अवक+व^{2}क

अ^{3}क^{2} ± अ^{2}वक^{2}

* +३अ^{2}वक^{2}+४अव^{2}क^{2}

३अ^{2}वक^{2} ± ३अव^{2}क^{2}

* + अव^{2}क^{2}+व^{3}क^{2}

अव^{2}क^{2}+व^{3}क^{2}

* *

(२) अ^{2}+व^{2}+क) अ^{4}व+अ^{2}व^{3}+२अ^{2}व+व^{3}क+वक^{2} (अ^{2}व+वक भा.

अपूर्णबीजगणित.

अपूर्णबीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकगणिताप्रमाणें च आहे.

प्रथमप्रकार.

भागानुबंध पूर्ण बीजास विषम अपूर्णबीजाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. पूर्णबीज अपूर्णबीजाचे छेदानीं गुणून त्या गुणाकारांत अंश मिळवावे; आणि त्याखालीं तो छेद लिहावा. ह्मणजे विषम-

अपूर्णबीजाचें रूप झालें.

उदाहरणें.

(१) $कड - के^२ - \frac{५कड + अ - २अ^२}{२}$ या भागानुबंध पूर्णबीजास विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे.

$\frac{२कड - २के^२ - ५कड - अ + २अ^२}{२} = \frac{२अ^२ - अ - २के^२ - ३कड}{२}$ हें उत्तर.

(२) $४के^२ + ३अक्ष^२ - \frac{२क्ष^२ + ड}{५अ} = \frac{२०अके^२ + १५अ^२क्ष^२ - २क्ष^२ - ड}{५अ}$ उत्तर

दुसराप्रकार.

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजाचें अथवा भागानुबंध पूर्णबीजाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. अंशास छेदानीं भागावें, भागाकार येईल, तो पूर्णबीज झाला. बाकी राहिल्यास भागाकाराचे बाजूस लिहून त्याखालीं छेद लिहावे.

उदाहरणें.

(१) $\frac{अक्ष^२ + बक्ष}{क्ष^२}$ यास पूर्णबीज रूप अ॰ भागानुबंध पूर्णबीज रूप दे.

$(अक्ष^२ + बक्ष) \div क्ष^२ = अ + बक्ष^{-१}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{१५अ^३ + ५अ^२}{३अ^३ + २अ^२ - २अ - ४}$ यास पूर्णबीज अ॰ भागानुबंध पूर्णबीज रूप दे.

उत्तर, $५ - \frac{५(अ^२ - २अ - ४)}{३अ^३ + २अ^२ - २अ - ४}$

(३) $\frac{३अ^२के^२ + ६अ^३के^२ + ३अके^४}{अ + क} = ३अ^२के + ३अके^३$ उत्तर.

तिसराप्रकार.

अपूर्णबीजास समछेद करावयाचा.

रीति. नवे अंशाकरितां प्रतिपदाचे अंशास त्याचे त्याचे छेदा

बांधून सर्व छेदांनीं गुणावें आणि समच्छेदा करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे. हीव दुसरी सर्व कृति अपूर्णांकांत लिहिल्याप्रमाणें करावी.

उदाहरणें.

(१) $\frac{७}{५}$, $\frac{क्ष^{२}}{४अ}$ आणि $\frac{६अक}{ब-क}$ यांस समच्छेद रूप दे.

$२८\times ४अ\times(ब-क)=(२८ब-२८क)४अ$
$क्ष^{२}\times(ब-क)\times५=५बक्ष^{२}-५कक्ष^{२}$
$६अक\times५\times४अ=१२०कअ^{२}$
$५\times४अ\times(ब-क)=२०अ(ब-क)$

उ॰ $\frac{(२८ब-२८क)४अ}{२०अ(ब-क)}$, $\frac{५बक्ष^{२}-५कक्ष^{२}}{२०अ(ब-क)}$, $\frac{१२०अ^{२}क}{२०अ(ब-क)}$

(२) $\frac{५}{अ}$, $\frac{अक्ष^{२}}{कक्ष^{२}}$ आणि $\frac{\frac{३}{२}अ^{२}}{अ-ब}$ यांस समच्छेद रूप दे.

चवथा प्रकार.

अपूर्ण बीजाच्या पदांचा दृढ भाजक काढण्याचा

रीति. मोठें पद लहान पदानें भागावें, बाकी राहील ती भाजक करून त्याणें पूर्व भाजकास भागावें. याप्रमाणें बाकी शून्य राहीपर्यंत करावें. शेवटील जो भाजक तोच दृढ भाजक होईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{अ^{५}-२अ^{३}ब^{२}}{अ^{४}-ब^{४}}$ याचा दृढ भाजक काढ.

उत्तर $अ^{२}-ब^{२}$

टीप. भाजक पदांमध्यें जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील ते भागून रद्द करावे; नंतर दृढ भाजक काढावा.

(२) $\frac{ब^{२}-४}{बक+२क}$ यांचा दृढ भाजक काढ. उत्तर, ब+२

(३) $\frac{अ^{२}क्ष+२अक्ष^{२}+क्ष^{३}}{५अ^{३}+१०अ^{२}क्ष+५अक्ष^{२}}$ यांचा दृढ भाजक काढ.

+ याची सिद्धता दुसरे भागांत आहे.

पांचवा प्रकार.

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करावयाचा.

रीति. पूर्व प्रकाराप्रमाणें अंशछेदांचा दृढ भाजक काढून त्याणें अंशाछेदांस भागावें; भागाकार येईल तो संक्षेप झाला.

उदाहरणें.

(१) $\frac{३अ^४+६अ^३क+३अ^२क^२}{अ^३क+३अ^२क^२+३अक^३+क^४}$ यांचा संक्षेप कर.

एथें (अ+क) हा दृढ भाजक आहे. याणें अंशछेदांस भागून,

उत्तर, $\frac{३अ^२}{अक+क^२}$

(२) $\frac{अ^२-अब}{अ^२+२अब+ब^२}$ यांचा संक्षेप कर.

उत्तर.

सहावा प्रकार.

अपूर्ण बीजांची मिळवणी करावयाची.

रीति. पदें समछेद असल्यास अंशांची बेरीज घ्यावी, आणि त्याखालीं समछेद लिहावा. आणि पदें समछेद नसल्यास समछेद करून वर सांगितल्याप्रमाणें मिळवणी करावी. पदें भागानुबंध असल्यास अपूर्ण बीजांची बेरीज घेऊन ती पूर्ण बीजांचे बेरीजेस जोडून लिहावी.

उदाहरणें.

(१) $\frac{४क्ष}{अ^२}$, $\frac{२कड}{ब}$ आणि $\frac{३अ}{५}$ यांची मिळवणी कर.

$\frac{४क्ष}{अ^२}+\frac{२कड}{ब}+\frac{३अ}{५}=\frac{५ब४क्ष}{५अ^२ब}+\frac{१०अ^२कड}{५अ^२ब}+\frac{३अ^३ब}{५अ^२ब}=\frac{५ब४क्ष+१०अ^२कड+३अ^३ब}{५अ^२ब}$.

(२) $अ+ब-\frac{क^२-ब^२}{अ+ब}$ आणि $५अ+\frac{ब}{अ^२}$ यांची मिळवणी कर.

उत्तर, $६अ+२ब+\frac{अब(१+अब)-अ^२क^२+क^२}{अ^२(अ+ब)}$

सातवा प्रकार.

अपूर्ण बीजाची वजाबाकी करावयाची.

रीति. पदें समछेद असल्यास अंशांची वजाबाकी करून त्याखालीं समछेद लिहावा; परंतु पदें समछेद नसल्यास समछेद करून नंतर वर सांगितल्या प्रमाणें वजाबाकी करावी.

उदाहरणें.

(१) $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{३अ}{४}$ यांची वजा. कर.

$\frac{५अ}{४}-\frac{३अ}{४}=\frac{अ}{२}$ हें उत्तर.

(२) $१२अक्ष+३य-\frac{३क}{ड}$ यांतून $५क्ष-\frac{य-४क}{अ}$ हें वजा कर.

उ० $१२अक्ष+३य-५क्ष-\frac{३अक-डय+४डक}{अड}$

(३) $\frac{\frac{३}{४}अ+क्ष^२}{स+द}$ यांतून $\frac{१क्ष^२+(क्ष+ओ)^२}{अ+ब+\frac{अब}{२क}}$ हे वजा कर.

आठवा प्रकार.

अपूर्ण बीज पदें परस्पर गुणावयाचा.

रीति. गुणाकाराचे अंश करितां गुण्य आणि गुणक यांचे सर्व अंश परस्पर गुणावे. आणि छेद करितां सर्व छेद परस्पर गुणावे+ ह्मणजे गुणाकार झाला. गुणाकार करण्या पूर्वी गुण्य आणि गुणक यांचे अंश छेदांत होईल तेवढा संक्षेप करावा.

उदाहरणें.

(१) $\frac{अ^३}{अ+ब}$ आणि $(अ^२+\frac{२अब+ब^२}{अ^२})$ हे परस्पर गूण.

$\frac{अ^३}{अ+ब}\times\frac{अ^२+२अब+ब^२}{अ^३}=अ+ब$ हें उत्तर.

(२) $अ^२-\frac{अ}{११क्ष}$, $\frac{क}{अ^२}$, $\frac{३}{२}$, $\frac{क}{ब}$ आणि $\frac{क}{अ}$ $\frac{३}{२}$ हे परस्पर गूण.

+ जेव्हां अपूर्ण बीजासंगतीं पूर्ण बीज गुणावयाचें आहे तेव्हां पूर्ण बीजानें अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे, आणि जर पूर्ण बीज आणि अपूर्ण बीजाचे छेद सारखे आहेत तर अंश हाच गुणाकार आहे.

नववा प्रकार.

एक अपूर्ण बीज पदास दुसऱ्यानें भागायाचा.

रीति. भाज्याचे अंश आणि छेद भाजकाचे अंश आणि छेद यांणीं अनुक्रमें निःशेष भागिले जातील तर भागावे. आणि तसें न होईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदलून त्यांणीं भाज्यास गुणावें.*

उदाहरणें.

(१) $\frac{३अ^२}{८}$ यांस $\frac{५अ}{८}$ यांणीं भाग.

$\frac{३अ^२}{८}\div\frac{५अ}{८}=\frac{३अ^२}{८}\times\frac{८}{५अ}=\frac{१५अ}{२५}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{२अक}{४कड}$ यांस $\frac{५अब}{८ड}$ यांणीं भाग.

$\frac{२अक}{४कड}\div\frac{५अब}{८ड}=\frac{२अक}{४कड}\times\frac{८ड}{५अब}$ $=\frac{२}{५}ब$ हें उत्तर.

(३) $\frac{१कक्ष^म-\frac{अ-क}{क}}{५अ\div२}$ हे भाज्य $(\frac{म}{म}क+\frac{मे}{म}ब)$ या भाजकानीं भाग.

बीजवर्गघनादि.

बीजवर्गघनादि ह्मणजे सांगितलें मूळबीज पुनःपुनः त्याच मूळबीजानें गुणून वाढविलेलें जें बीज तें. जसें कोणत्याही पदाचा वर्ग, घन, चतुर्घात इत्यादिक काय होती हें पहाणें.

रीति. सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्याचेच घात प्रकाशकसंख्येंत एक कमी वेळां पुनःपुनः गुणावें; शेवटील गुणाकार इच्छिला वर्गघनादि होईल. मुळांत अक्षर चिन्हें असतील तर त्याचा साधारण वर्गादि प्रकाशक इच्छिले वर्गादि प्रकाशकानें गुणून तो गुणाकार त्या मुळास घातप्रकाशक करावा ह्मणजे वर्गघनादि होईल. पदास वेळा प्रकाशक असल्यास त्याचे वर्गघनादि करून तें त्या पदाच्या वर्गघनादिकांस जोडून लिहावें.

*याची सिद्धता व आणखी विचार दुसरे भागी व्यवहारी अपूर्णांकाचे भाग

टीप. मुळाचें प्रकाशक चिन्ह धन असल्यास वर्गादि धन आणि $\overset{+}{\text{ऋण}}$ असल्यास समघात धन आणि विषम घात ऋण होतील.

उदाहरणें.

(१) $५\text{अ}^२$ याचा वर्ग कर.
$५\text{अ}^२ \times ५\text{अ}^२ = २५\text{अ}^४$ हें उत्तर.

(२) $\text{अ} - \text{अ}^२\text{ब}^२ + \text{ब}$ याचा वर्ग कर.
उत्तर $\text{अ}^२ - २\text{अ}^३\text{ब}^२ + २\text{अब} - २\text{अ}^२\text{ब}^३ + \text{अ}^४\text{ब}^४ + \text{ब}^२$

(३) $\frac{३\text{अ}^२}{\sqrt[३]{\text{अ}-\text{क्ष}}}$ याचा षड्घात कर.
उत्तर $\frac{७२९\text{अ}^{१२}}{(\text{अ}-\text{क्ष})^२}$

(४) $\text{क्ष}^२ - \frac{१}{२}\text{क}^२\text{उ}^२ + \text{अ}^२$ याचा घन कर.

सर ऐझाक न्यूटन. याणें द्वियुक्पदाचे वर्गादिक करावयाकरितां जी रीति केली आहे ती खालीं लिहिलेल्या प्रकारावरून समजेल.

$$(\text{अ} \pm \text{क्ष})^\text{न} = \text{अ}^\text{न} \pm \text{न}\,\text{अ}^{\text{न}-१}\,\text{क्ष} + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\,\text{अ}^{\text{न}-२}\,\text{क्ष}^२ \pm \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\,\text{अ}^{\text{न}-३}\,\text{क्ष}^३ + \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\cdot\frac{\text{न}-३}{४}\,\text{अ}^{\text{न}-४}\,\text{क्ष}^४ + \text{इ}^०$$

कारांत मह.

+ चिन्हाविषयींचे पांचवें प्रकारांत पहा.

* $(\text{अ}+\text{क्ष})$ या द्वियुक् पदाचा न घात करावयाचा आहे असें मनांत आण.

आतां, $\frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{\text{अ}+\text{क्ष}}$

$$\begin{array}{l} \text{अ}+\text{क्ष} \\ \text{अ}+\text{क्ष} \\ \hline \text{अ}^२+\text{अक्ष}+\text{अक्ष}+\text{क्ष}^२ \quad \text{(हा एक घात)} \\ \hline \text{अ}^२+२\text{अक्ष}+\text{क्ष}^२ \quad \text{(हा द्विघात.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{अ}+\text{क्ष} \\ \text{अ}+\text{क्ष} \\ \text{अ}+\text{क्ष} \\ \hline \text{अ}^३+\text{अ}^२\text{क्ष}+\text{अ}^२\text{क्ष}+\text{अ}^२\text{क्ष}+\text{अक्ष}^२ \\ \quad +\text{अक्ष}^२+\text{अक्ष}^२+\text{क्ष}^३ \\ \hline \text{अ}^३+३\text{अ}^२\text{क्ष}+३\text{अक्ष}^२+\text{क्ष}^३ \quad \text{त्रिघात.} \end{array}$$

यावरून $(\text{अ}+\text{क्ष})$ याचे न घाताचें प्रथम पद $\text{अ}^\text{न}$ होईल, कारण तें न संख्याक अंचा परस्पर गुणाकारानें झालें आहे. आणि कोणत्याही घातांत असें आहे कीं, प्रथम ओळींतील दुसरें आणि दुसरे ओळींतील पहिलें या पदांचा गुणाकार, आणि पहिले ओळींतील पहिलें आणि दुसरे ओळींतील दुसरें या पदांचा गुणाकार, या दोन गुणाकारांची बेरीज दुसरें पद होतें.

द्वियुक् पदांचा प्रथम घातांत दुसऱ्या पदास अं म्हणजे १ हा अंक गुणक क्ष या पदास येतो; द्विघातांत अचा एक घात गुणक येतो; त्रिघातांत अचा —

यांत अ = प्रथमपद, क्ष = दुसरें पद आणि न घातप्रकाशक.

मूळ त्रियुक्पद अथवा चतुर्युक् पद असल्यास त्याचें द्वियुक्पद करून नंतर वर्गादि करावे. आणि त्या पदांच्या किमती आंत ठेवाव्या. जसें अ + क्ष + कड + २ब या चतुर्युक्पदाचें (अ + क्ष) + (कड + २ब) हें द्वियुक्पद आहे. याचा इच्छिला घात करून त्यांत त्याच्या किमती लिहाव्या.

द्विघात येतो. या प्रमाणें पहातां असें समजतें कीं, प्रथम पदाचा घातप्रकाशक एकोन इतका दुसरे ओळींतील प्रथम पदास घातप्रकाशक करून तें पद प्रथम ओळींतील दुसऱ्या पदास गुणक होतें. म्हणून (अ+क्ष) या द्वियुक् पदाचा (न) घातांत $अ^{न-१}$ हा क्ष या पदास गुणक होईल. आणि द्विघात करावयाचे वेळेस प्रथम आणि दुसरें पद यांचा दोन गुणाकारांची बेरीज होते. आणि त्या गुणाकाराचे वेळेस प्रथम ओळींतील प्रथमपद आणि दुसरे ओळींतील दुसरें पद यांचा गुणाकार एक वेळ मिळविला जातो. याजकरितां त्रिघाताचे वेळेस तीन वेळां, चतुर्घाताचे वेळेस चार वेळां, या प्रमाणें मिळविला जातो. म्हणजे (न) घातांतील दुसऱ्या पदास प्रथम पदाचा घातप्रकाशक इतका वेळ प्रकाशक होतो. याजकरितां दुसरें पद न $अ^{न-१}$ × क्ष होईल.

द्वियुक् पदाचा वर्ग करणें आहे तेव्हां, तिसऱ्या पदाकरितां $अ^{०}$ म्हणजे (१) हा गुणक दुसऱ्या पदाचे वर्गास म्हणजे $क्ष^{२}$ यास येतो. आणि घन करणें असल्यास अथवा एक घात आणि चतुर्घात करणें असल्यास त्याचा वर्ग दुसऱ्या पदाचे वर्गास गुणक येतो. यावरून दिसतें कीं, प्रथम पदाचा घातप्रकाशकांत दोन उणे इतके दुसऱ्या ओळींतील प्रथम पदास घातप्रकाशक करून तें पद दुसऱ्या ओळींतील दुसऱ्या पदाचे वर्गास गुणक होतें. म्हणून (अ+क्ष) या द्वियुक् पदाचे न घातांत $अ^{न-२}$ हा $क्ष^{२}$ या पदास गुणक येईल आणि त्रिघात करावयाचे वेळेस तिसऱ्या पदाकरितां, दुसऱ्या पदाचा वर्ग आणि प्रथम पद याचे तीन वेळ- म्हणजे ($३\cdot\frac{३-१}{२}$) = ३ वेळ गुणाकार मिळविले जातात. चतुर्घात करावयाचे वेळेस सहा वेळ म्हणजे ($४\cdot\frac{४-१}{२}$) = ६ वेळ गुणाकार मिळविले जातात. याजकरितां न घातांतील तिसऱ्या पदास $न\cdot\frac{न-१}{२}$ हा वेळा प्रकाशक होतो, तेव्हां तिसरें पद $न\cdot\frac{न-१}{२}\times अ^{न-२}\cdot क्ष^{२}$ हें आहे. या प्रमाणें द्वियुक् पदाचे न घातांतील चवथें पद $न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}\cdot अ^{न-३}\,क्ष^{३}$ या प्रमाणें पुढेंही.

उदाहरणें.

(१) अ+क्ष याचा घन काय होतो?

$\text{अ}^3+3\cdot\text{अ}^2\text{क्ष}+3\cdot\frac{3-1}{2}\cdot\text{अक्ष}^2+3\cdot\frac{3-1}{2}\cdot\frac{3-2}{3}\cdot\text{क्ष}^3=\text{अ}^3+3\text{अ}^2\text{क्ष}+3\text{अक्ष}^2+\text{क्ष}^3$ उत्तर.

(२) $\frac{1}{2}\text{अ}-5\text{क्ष}$ याचा चतुर्घात काय होतो?

उत्तर, $\frac{1}{16}\text{अ}^4-\frac{5}{2}\text{अ}^3\text{क्ष}+\frac{75}{2}\text{अ}^2\text{क्ष}^2-250\text{अक्ष}^3+625\text{क्ष}^4$

(३) $2\text{व}+3\text{ड}+\frac{1}{3}\sqrt{\text{क}-\text{ड}}$ याचा घन काय होतो?

$\left((2\text{व}+3\text{ड})+\frac{1}{3}\sqrt{\text{क}-\text{ड}}\right)^3=(2\text{व}+3\text{ड})^3+2(2\text{व}+3\text{ड})^2\sqrt{\text{क}-\text{ड}}+\frac{1}{3}(2\text{व}+3\text{ड})\sqrt{(\text{क}-\text{ड})^2}+\frac{1}{27}(\text{क}-\text{ड})=8\text{व}^3+36\text{व}^2\text{ड}+54\text{वड}^2+27\text{ड}^3$
$+(8\text{व}^2+24\text{वड}+18\text{ड}^2)(\text{क}-\text{ड})^{\frac{1}{2}}+(\frac{2}{3}\text{व}+\text{ड})(\text{क}-\text{ड})^{\frac{2}{2}}+\frac{1}{27}(\text{क}-\text{ड})$ उ०

बीजवर्गादिमूळ.

बीजवर्गादि मूळ म्हणजे वर्गादिकाची उलट आहे,व त्यांत ज्याचें वर्गादि मूळ काढावयाचें तें पद एकाकी अथवा संयुक्त असतें,या वरून त्याचे तीन प्रकार आहेत.

प्रथमप्रकार

एकाकी पदाचें मूळ काढायाचा.

रीति. अंकगणित रीतीनें वेळा प्रकाराकाचें मूळ काढावें आणि अक्षर चिन्हांचा वर्गादि प्रकाशक इच्छिल्या मूळ प्रकाशकानें भागून,तो भागाकार त्या अक्षरास वर्गादि प्रकाशक करावा; नंतर तें पद वेळा प्रकाशकाचे काढिलें मूळास जोडावें. म्हणजे इच्छिलें मूळ होईल.

+धन पदाचें कोणतेंही सम मूळ धन अथवा ऋण आहे आणि विषम मूळ धन आहे. ऋण पदाचें विषम मूळ ऋण,आणि सम मूळ अशक्य आहे याचा विचार

उदाहरणें.

(१) $२५ब^२$ यांचें वर्गमूळ काढ.

$\sqrt{२५ब^२} = \pm ५ब$ हें उत्तर.

(२) $-८क^३$ यांचें घनमूळ काढ.

उत्तर, $२क$

(३) $\frac{२५अ^२क^४}{१५ब^४}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $\frac{२अक^२}{ब^२}\sqrt{\frac{१}{१५}}$

(४) $-६४अ^६$ यांचें वर्गमूळ आणि घनमूळ काढ.

उत्तर $\begin{cases} \text{वर्गमूळ, अशक्य} \\ \text{घनमूळ, } -४अ^२ \end{cases}$

(५) $\frac{-२२अ^३क^४}{-१ब^३}$ यांचें घनमूळ.

उत्तर, $\frac{-२अक}{३ब}\sqrt[३]{\frac{५क}{२}}$

दुसरा प्रकार.

संयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा.

रीति. अंकगणितांत वर्गमूळ काढण्याची रीति लिहिली आहे, त्या प्रमाणेंच ही आणावी.

उदाहरणें.

(१) $क^४+४क^३ब+६क^२ब^२+४कब^३+ब^४$ यांचें वर्गमूळ काढ.

$क^२) \; क^४+४क^३ब+६क^२ब^२+४कब^३+ब^४ \; (क^२+२कब+ब^२$, वर्गमूळ

$क^४$

$२क^२+२कब \;\; * +४क^३ब+६क^२ब^२$

$२कब \;\; \underline{-४क^३ब \pm ४क^२ब^२}$

$२क^२+४कब+ब^२ \;\; * \; +२क^२ब^२+४कब^३+ब^४$

$ब^२ \;\; \underline{\pm २क^२ब^२ \pm ४कब^३ \pm ब^४}$

* * *

(२) $अ^२-अब$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, $अ - \frac{ब}{२} - \frac{ब^२}{८अ} - \frac{ब^३}{१६अ^२} -$ इ०

(३) $१+अ$ यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर $१+\frac{अ}{२}-\frac{अ^२}{८}+\frac{अ^३}{१६}-+$ इ०

चिन्हाविषयीं नें सहावे प्रकारांत पहा.

तिसरा प्रकार.

कोणते ही वर्गादींचें मूळ काढावयाचा.

रीति[+]. प्रथम पदाचें सांगितलें मूळ काढून तें भागाकार स्थळीं लिहावें, आणि त्याचा सांगितले मूळा इतका घात करून तो प्रथम पदांतून वजा करावा. नंतर नवे भाज्या करितां वरचें दुसरें पद खालीं घ्यावें आणि नवे भाजका करितां सें काढिलें मूळ सांगितल्या वर्गादि घातांत एक घात कमी पर्यंत वाढवावें आणि त्यास सांगितल्या वर्गादि प्रकाचा कानें गुणून भाजक स्थळीं लिहावें. त्याणें नवे भाज्यास भागून जें येईल तें भागाकार स्थळीं पूर्व मूळाचे वर लिहावें. नंतर भागाकार स्थळींचें तें सर्व मूळ सांगितले वर्गादि घाता पर्यंत वाढवून सांगितले सर्व वर्गादींतून वजा करावें. नंतर जी बाकी राहील तिचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागून जें येईल तें, भागाकार स्थळीं लिहावें. आणि भागाकार स्थळींचें सगळें मूळ सांगितले वर्गादि घातापर्यंत वाढवून सांगितल्या वर्गादींतून वजा करावें. या प्रमाणें शेवट पर्यंत करावें म्हणजे इच्छिलें वर्गादि मूळ निघेल.

+ जेव्हां सांगितला घात फार मोठा आहे तेव्हां या रीतीनें तपशील करण्यास फार श्रम पडतात. असें कोणाचे मनांत येईल, तर कोणे समयीं संयुक्त पदाचें मूळ त्वरित निघण्याची ही रीति आहे कीं, त्यांतील कित्येक सोईचीं पदें घेऊन त्यांचीं सांगितलीं मुळें काढावीं आणि तीं मूळांचीं पदें क्रमारानें (+) धन (−) ऋण चिन्हानीं जोडून लिहावीं नंतर हें मूळ सांगितल्या घाता पर्यंत वाढवावें तें जर सांगितले घाता बरोबरे झालें तर हेंच मूळ खरें आहे, परंतु जर वाढविल्या घाताचीं क्रमारानें पूर्वी केलेलीं चिन्हें सांगितले घाता बरोबर नाहींत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोन्ही ठिकाणीं सांगितले घाता बरोबर होतील अशीं करावीं.

जसें अ[illegible]−८अ[illegible]ब+९४ब[illegible]−[illegible]अ[illegible]+२४ब+[illegible] याचें वर्गमूळ काढणें आहे. यांत पहिलें, तिसरें आणि सहावें या तीन पदांचे मूळाचे आधारानें वरील उदाहरणाचें संयुक्त मूळ निघतें

उदाहरणें.

(१) $अ^४-२अ^३ब+३अ^२ब^२-२अब^३+ब^४$ यांचें वर्गमूळ काढ.

$$अ^४-२अ^३ब+३अ^२ब^२-२अब^३+ब^४ \; (अ^२-अब+ब^२$$ वर्गमूळ हें उत्तर.

$$\underline{-अ^४}$$

$$२अ^२)\; \times -२अ^३ब$$

$$\underline{\mp अ^४ \pm २अ^३ब \pm अ^२ब^२} = (अ^२-अब)^२$$

$$२अ^२)\; \times \quad \times \; +२अ^२ब^२$$

$$\underline{\mp अ^४ \pm २अ^३ब \pm ३अ^२ब^२ \mp २अब^३ \pm ब^४} = (अ^२-अब+ब^२)^२$$

$$\times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times$$

(२) $८अ^६-७२अ^४क^२+२१६अ^२क^४-२१६क^६$ यांचें घनमूळ काढ. उ॰ $२अ^२-६क^२$

(३) $१-क्ष^३$ यांचें घनमूळ काढ.

(४) $१-क्ष$ यांचें (न) घातमूळ काढ.

करणी.

करणी ह्मणजे ज्याचें मूळ बराबर येत नाहीं तें पद. या करणीस मूळ प्रकाराकानें अथवा मूळ चिन्हानें युक्त लिहितात. जसें $५^{\frac{१}{२}}$ अथवा $\sqrt{५}$ आणि $क^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt[३]{क}$.

प्रथम प्रकार.

अखंडपदास करणीचें रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितल्या पदास करणीचे घातापर्यंत वाढवावें. आणि त्यास ती करणी जोडावी.

उदाहरणें.

(१) ब-५ यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

$(ब-५)\times(ब-५) = ब^२-१०ब+२५$

$ब-५ = \sqrt{ब^२-१०ब+२५} = (ब^२-१०ब+२५)^{\frac{१}{२}}$

(२) $अ^२क्ष^३$ यांस षड्घातमूळाचें रूप दे. $(अ^२क्ष^३)^६ = अ^{१२}क्ष^{१८}$

$\sqrt[६]{अ^{१२}क्ष^{१८}} = (अ^{१२}क्ष^{१८})^{\frac{१}{६}}$ हें उत्तर.

दुसरा प्रकार.

पदांस सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितल्या पदांचे मूळ प्रकाशक समछेद करावे, नंतर तीं प्रत्येक पदें वेगळाले अंशस्थळींचे संख्ये इतके घाता पर्यंत वाढवावीं; आणि त्यांस समछेद मूळ प्रकाशक करावा.

उदाहरणें.

(१) $(अ+क्ष)^{\frac{१}{३}}$ आणि $(ब+क)^{\frac{१}{५}}$ यांस सममूळ प्रकाशक रूप दे.

$\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{५}$ = $\frac{५}{१५}$ आणि $\frac{३}{१५}$ पाज करितां, $(अ+क्ष)^{\frac{५}{१५}}$, $(ब+क)^{\frac{३}{१५}}$ उ.

(२) $अ^{\frac{१}{३}}$ आणि $ब^{\frac{१}{२}}$ यांस सममूळ प्रकाशक रूप दे.

उत्तर, $(अ^{२})^{\frac{१}{६}}$, $(ब^{३})^{\frac{१}{६}}$ अ० $\sqrt[६]{अ^{२}}$, $\sqrt[६]{ब^{३}}$

सांगितलें सममूळ प्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे तर, पदांचे मूळ प्रकाशक सांगितले प्रकाशकानें भागावे. ह्मणजे ते वेगळाले भागाकार त्या पदांचे नवे नवे मूळ प्रकाशक होतील. नंतर त्यांस सांगितला मूळ प्रकाशक लिहावा.

उदाहरणें.

(१) $अ^{\frac{१}{म}}$ आणि $क^{\frac{१}{न}}$ यांस $\frac{१}{र}$ हा सममूळ प्रकाशक कर.

$$\left.\begin{aligned} \frac{१}{म} \div \frac{१}{र} &= \frac{१}{म} \times \frac{र}{१} = \frac{र}{म} \\ \frac{१}{न} \div \frac{१}{र} &= \frac{१}{न} \times \frac{र}{१} = \frac{र}{न} \end{aligned}\right\} \text{उत्तर, } \left(अ^{\frac{र}{म}}\right)^{\frac{१}{र}}, \left(क^{\frac{र}{न}}\right)^{\frac{१}{र}}$$

तिसरा प्रकार.

करणी पदास अति सरळ रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितले पदाचे गुण्य गुणक रूप दोन अवयव करावे. असे कीं, त्यांतील एक अवयवाचें मूळ निघेल, नंतर त्या मूळास तो दुस

रा अवयव जोडून लिहावा.

उदाहरणें.

(१) $\sqrt[3]{५४}$ या करणीस अति सरळ रूप दे.

$\sqrt[3]{५४} = \sqrt[3]{२७ \times २} = ३\sqrt[3]{२}$ हें उ०

(२) $\sqrt[3]{अ^{४}क्ष^{३} + बक्ष^{४} + क्ष^{४}}$ या करणीस अति सरळ रूप दे.

उत्तर, क्ष $\sqrt[3]{अ^{४} + बक्ष + क्ष}$

प्रथमटीप. जेव्हां कोणतें ही पद करणीस मागें जोडलें आहे तेव्हां त्यास करणी पदाचे अवयवां पैकीं जें पद करणीतून मुक्त होऊन येईल, त्याणें गुणून लिहावें. आणि त्यास तो करणी अवयव जोडून लिहावा.

उदाहरण.

$२अ\sqrt[3]{१२८}$ या करणीस अति सरळ रूप दे.

$२अ\sqrt[3]{१२८} = २अ\sqrt[3]{६४ \times २} = २अ \times ४\sqrt[3]{२} = ८अ\sqrt[3]{२}$ हें उत्तर.

दुसरी टीप. अपूर्ण करणीस अति सरळ रूप द्यावयाचें. तर, करणी पदाचे छेद पूर्ण घात होतील, अशा पदानें करणी पदाचे अंश आणि छेद यांस गुणावें. नंतर छेदांचें मूळ काढून तें छेद रूपानें दुसऱ्या अवयवास जोडून लिहावें.

उदाहरण.

$\frac{३}{५}\sqrt{\frac{अ^{३}}{ब}}$ आणि $(अ+क्ष)\sqrt{\frac{१}{अ+क्ष}}$ या करणीस अति सरळ रूप दे.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{३}{५}\sqrt{\frac{अ^{३}}{ब} \times \frac{ब}{ब}} = \frac{३}{५}\sqrt{\frac{अ^{२} \times अ \times ब}{ब^{२}}} = \frac{३}{५} \times \frac{अ}{ब}\sqrt{अब} = \frac{३अ}{५ब}\sqrt{अब} \\ (अ+क्ष)\sqrt{\frac{१}{अ+क्ष} \times \frac{अ+क्ष}{अ+क्ष}} = (अ+क्ष)\sqrt{\frac{अ+क्ष}{(अ+क्ष)^{२}}} = \sqrt{अ+क्ष} \end{array}\right\} \text{उ०}$$

∴ जर सांगितले करणी पदाचे गुण्य गुणक दोन अवयवांतून एकाही अवयवाचें मूळ बरोबर निघत नाहीं, तर ती करणी अति सरळच आहे. जसें, $\sqrt{२१}$ यास याहून दुसरें सरळ रूप देतां येणार नाहीं.

चवथा प्रकार.

करणी पदांची मिळवणी करावयाचा.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास सम मूळ प्रकाशक रूप देऊन एक जातीची करावी, नंतर अति सरळ रूप द्यावें. करणींतील अवयव एक असल्यास सर्व अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन, त्यावर जेस तो करणी अवयव जोडून लिहावा.

उदाहरणें.

(१) $३\sqrt{१८}$ आणि $\frac{३}{२}\sqrt{८}$ यांची बेरीज काय होते?

$३\sqrt{१८} = ३\sqrt{९\times२} = ९\sqrt{२}$
$\frac{३}{२}\sqrt{८} = \frac{३}{२}\sqrt{४\times२} = ३\sqrt{२}$
} $९\sqrt{२} + \frac{३}{२}\sqrt{२} = (९ + \frac{३}{२})\sqrt{२} = \frac{२१}{२}\sqrt{२}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{अ}{क}\sqrt{ब^३}$ आणि $\frac{३}{२}\sqrt{ब^५}$ यांची बेरीज काय होते.

उत्तर $\frac{अ}{बक}\sqrt{ब^५} + \frac{३}{२}\sqrt{ब^५}$

पांचवा प्रकार.

करणी पदांची वजाबाकी करावयाचा.

रीति. पूर्व प्रकारा प्रमाणें दोन ही पदें तयार करावीं. नंतर करणी अवयव एक असल्यास अखंड अवयवांची वजाबाकी करून, त्यास करणी अवयव जोडून लिहावा. आणि करणी अवयव एक नसल्यास उणें चिन्ह जोडून लिहावें.

उदाहरणें.

(१) $\sqrt{१४७}$ आणि $\sqrt{१२}$ यांची वजाबाकी कर.

$\sqrt{१४७} = \sqrt{४९\times३} = ७\sqrt{३}$
$\sqrt{१२} = \sqrt{४\times३} = २\sqrt{३}$
} $७\sqrt{३} - २\sqrt{३} = ५\sqrt{३}$ हें उत्तर

(२) $\sqrt{\frac{३}{६६}}$ आणि $\sqrt{\frac{३०}{५८}}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{३}{४४}\sqrt{२१}$

सहावा प्रकार.

करणी पदें परस्पर गुणावयाचा.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास एकजातीची करावी. नंतर अखंड अवयांचा गुणाकार करावा. तसा खंड अवयवांचा गुणाकार करावा. आणि मध्यें करणी जोडावी. नंतर त्यास होईल तर अति सरळ रूप द्यावें.

उदाहरणें.

(१) $४\sqrt{६}$ आणि $\frac{१}{२}\sqrt{१४}$ यांचा गुणाकार कर.

$४\sqrt{६} \times \frac{१}{२}\sqrt{१४} = २\sqrt{८४} = २\sqrt{४\times२१} = ४\sqrt{२१}$ हें उत्तर.

(२) $(अ+२\sqrt{ब})^{\frac{१}{२}}$ आणि $(अ-२\sqrt{ब})^{\frac{१}{२}}$ यांचा गुणाकार कर.

उत्तर, $(अ^{२}-४ब)^{\frac{१}{२}}$

(३) $२क्ष^{\frac{१}{३}}$ आणि $३य^{\frac{१}{२}}$ यांचा गुणाकार कर.

उत्तर, $६क्ष^{\frac{१}{३}}य^{\frac{१}{२}}$

सातवा प्रकार.

करणी पदांचा भागाकार करावयाचा.

रीति. करणी अनेक जातीची असल्यास एक जातीची करावी; नंतर अखंड अवयवांचा भागाकार करावा. तसा खंड अवयवांचा भागाकार करावा. आणि मध्यें साधारण करणी जोडून लिहावी. नंतर होईल तर अतिसरळ रूप द्यावें.

उदाहरणें.

(१) $१६\sqrt{२१६}$ यांस $३\sqrt{१२}$ यांणीं भाग.

$\frac{१६\sqrt{२१६}}{३\sqrt{१२}} = \frac{१६}{३}\sqrt{१८} = \frac{१६}{३}\sqrt{९\times२} = १६\sqrt{२}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{अ}{ब}\sqrt{अ^{२}-ब^{२}}$ यांस $\frac{अ}{ब^{२}}\sqrt{अ^{२}-ब^{२}}$ यांणीं भाग.

उत्तर, $ब\sqrt{(अ+ब)(अ^{२}-ब^{२})}$

टीप. करणीचा भागाकार भाज्य भाजकाचे मूळ प्रकाशक चिन्हाचे बजाबाकी वरून होतो. यावरून निश्चय कळतें कीं, कोणतेही अपूर्णांकाचे अथवा अपूर्ण बीजाचे छेद अंशस्थळीं घेतां येतील. अथवा अंश छेदस्थळीं घेतां येतील. असे कीं, प्रकाशक चिन्ह धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल करून. पुनः $\frac{अ^{म}}{अ^{म}} = १$ अथवा $अ^{म-म} = अ^{०}$ यापासून निघतें कीं, हें अक्षरचिन्ह कोणतेही एक पदाबराबर आहे, जें पद एक या संख्येबराबर आहे. याजकरितां जास्थळीं $अ^{०}$ अशा रीतीचें अक्षरचिन्ह येतें, तेथें १ हा अंक लिहितां येईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{१}{अ} = \frac{अ^{-१}}{१}$ अथवा $अ^{-१}$ आणि $\frac{१}{क^{\frac{म}{न}}} = क^{-\frac{म}{न}}$

(२) $\frac{ड}{क} = डक^{-१} = \frac{क^{-१}}{ड^{-१}}$ आणि $\frac{ड^{म}}{क^{न}} = \frac{क^{-न}}{ड^{-म}}$

(३) $\frac{१}{अ+ब}$ आणि $अ(क्ष^{२}+य^{२})^{-\frac{१}{२}}$ यांची प्रकाशक चिन्हें बदलकरून लिही. उत्तरें, $(अ+ब)^{-१}$, $\frac{अ}{(क्ष^{२}+य^{२})^{\frac{१}{२}}}$ अथवा $\frac{(क्ष^{२}+य^{२})^{-\frac{१}{२}}}{अ^{-१}}$ अ॰ $\frac{१}{अ^{-१}(क्ष^{२}+य^{२})^{\frac{१}{२}}}$

आठवा प्रकार.

करणी पदास वर्ग घनादिकें करून वाढवावयाचा.

रीति. जेव्हां करणी पद एकाकी आहे, तेव्हां करणी पदाचें प्रकाशक चिन्ह सांगितले वर्गादि प्रकाशकानें गुणावें. हें करणीचे खंड अ

वयवांचें वर्गघनादि होईल. नंतर त्या करणी पदांत अखंड अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गघनादि करून तें त्यास जोडावें. जर करणी संयुक्त आहे, तर तें पद संयुक्त पदाचे वर्गघनादि करावयाचे रीतीनें वाढवावें.

उदाहरणें.

(१) $\frac{५}{६}$ अ^{२} यांचा घन काय होतो?
$(\frac{५}{६}अ^{२})^{३} = \frac{१२५}{२१६}अ^{६}$ हें उत्तर.

(२) √क्ष−√य यांचा वर्ग काय होतो?
उत्तर, क्ष−२√क्षय+य

(३) २√(अ+ब) यांचा षड्घात काय होतो?
उत्तर, ६४ (अ+ब)^{३}

नववा प्रकार.

करणी पदाचें वर्गादि मूळ काढावयाचा.

रीति. जेव्हां करणी पद एकाकी आहे, तेव्हां त्याचें प्रकारांक मि न्ह सांगितल्या मूळ प्रकारांकानें भागावें आणि करणींत अखंड अवयव असल्यास त्याचें मूळ रीती प्रमाणें काढून त्यास जोडावें. जर करणी संयुक्त आहे, तर पूर्वी सांगितले रीतीनें त्याचें वर्गादि मूळ काढावें.+

उदाहरणें.

(१) ३√अ^{२} यांचें घनमूळ काढ.
$(३)^{\frac{१}{३}} \times √अ^{\frac{२}{३}} = \sqrt[३]{३} \sqrt[६]{अ^{२}}$
हें उत्तर.

(२) $\frac{१}{२}\sqrt[३]{अ^{न}}$ यांचें पंचघात मूळ काढ.

(३) $\frac{अ^{म}}{२७}\sqrt[३]{क्ष^{म}}$ यांचें वर्गमूळ काढ.

+ कोणतेही पद (अ) याचें (म) घाताचें (न) मूळ = अ$^{\frac{म}{न}}$ अथवा (म) मूळाचें (न) मूळ = अ$^{\frac{१}{मन}}$ असें होतें. यावरून कळतें कीं, कोणतेही पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ त्या पदाचे चतुर्घात मूळाबरोबर आहे. आणि वर्गमूळाचें घनमूळ षड्घात मूळाबरोबर आहे.

दहावा प्रकार.

द्वियुक्पदास सामान्य करणी रूप द्यावयाचा.

रीति. सांगितलें द्वियुक्पद त्यांतील करणीचे घातापर्यंत वाढवावें. नंतर त्या घाताचें मूळचिन्ह त्यास जोडून लिहावें. म्हणजे सामान्य करणी रूप झालें.

उदाहरणें.

(१) $\sqrt{२}-१$ यांस सामान्य करणीरूप दे.

$(\sqrt{२}-१)^{२} = २-२\sqrt{२}+१ = ३-२\sqrt{२}$

$\sqrt{२}-१ = \sqrt{३-२\sqrt{२}}$ हें उत्तर.

(३) क्ष$^{२}-\sqrt{१९}$ यांस सामान्य करणी रूप दे.

(२) अ$^{२}-\sqrt{५}$ आणि $२+\sqrt{अ}$ यांस सामान्य करणीरूप दे.

उ. $\sqrt{अ^{४}+५-२अ^{२}\sqrt{५}}$; $\sqrt[३]{अ+८+१२\sqrt{अ}+६\sqrt{अ^{२}}}$

अकरावा प्रकार.

द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढावयाचा.

रीति. खालचे सारणी कोष्टकांतील अक्षरस्थानीं सांगितले करणीचे दोन अवयव लिहावे. म्हणजे सांगितले पदाचें मूळ होईल. करणी धनर्णपद असल्यास खालचें चिन्ह घ्यावें.

$$\sqrt{अ\pm\sqrt{ब}} = \sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}} \pm \sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}}$$

+ मनांत आणकीं, कोणते ही दोन पदांचे बेरजेचें वर्गमूळ क्ष+य आणि वजाबाकीचें वर्गमूळ क्ष−य आहे. याजकरितां

$\sqrt{अ+\sqrt{ब}} =$ क्ष+य
$\sqrt{अ-\sqrt{ब}} =$ क्ष−य } प्रथम व दुसरें यांचा गुणाकार करून

$\sqrt{अ^{२}-ब} =$ क्ष^{२}−य^{२}

प्रथम व दुसरें यांचा वर्ग करून.

अ$+\sqrt{ब} =$ क्ष^{२}+२क्षय+य^{२}
अ$-\sqrt{ब} =$ क्ष^{२}−२क्षय+य^{२} } बेरीज करून

२अ = २क्ष^{२}+२य^{२}

अ = क्ष^{२}+य^{२} यांत पूर्वींचे दोन समीकरणांचा गुणाकार मिळवून व वजा करून

$\tfrac{अ}{२}+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब} =$ क्ष^{२}
$\tfrac{अ}{२}-\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब} =$ य^{२} } वर्गमूळ काढून

$\sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}} =$ क्ष
$\sqrt{\tfrac{१}{२}अ+\tfrac{१}{२}\sqrt{अ^{२}-ब}} =$ य } बेरीज व वजाबाकी करून

उदाहरणें.

(१) $३+\sqrt{८}$ याचें वर्गमूळ काढ.

$\sqrt{३+\sqrt{८}}=\sqrt{\frac{३}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{९-८}}+\sqrt{\frac{३}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{९-८}}=\sqrt{२}+१$ हें उत्तर.

(२) $७-\sqrt{४५}$ याचें वर्गमूळ काढ.

$\sqrt{७-\sqrt{४५}}=\sqrt{\frac{७}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{४९-४५}}-\sqrt{\frac{७}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{४९-४५}}=\frac{३}{२}\sqrt{२}-\frac{१}{२}\sqrt{१०}$ हें उ.

(३) $६\pm४\sqrt{२}$ याचें वर्गमूळ काढ.

बारावा प्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढावयाचा. असा कीं, त्यानें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां, त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड होईल.

रीति. जेव्हां करणीचें एक पदाचा किंवा दोनही पदांचें मूळ प्रकाशक सम आहेत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें एक चिन्ह बदल करावें. ह्मणजे तो गुणक होईल. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद गुणावें. याप्रमाणें गुणाकारांतही एक चिन्ह बदल करून पुनःपुन्हा गुणावें. गुणाकारास करणीरूप सुटे पर्यंत.

यारीतीनें त्रियुक्पद करणीस एक चिन्ह, चतुर्युक्पद करणीस दोन, पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हें बदल करावी. याप्रमाणें पुढेंही.

जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळप्रकाशक विषम आहे तेव्हां, त्या द्वियुक पदास जितका घात मूळप्रकाशक असेल त्यांत एक कमी इतका त्या द्वियुक पदाचा घात करावा. व त्यांतील वेळा प्रकाशक न लिहितां दुसरें, चवथें, सहावें, इ० पदांचीं चिन्हें बदल करून लिहावीं. ह्मणजे तो गुणक होईल.

$$\left.\begin{array}{l} स+य=\sqrt{अ+\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}+\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}} \\ स-य=\sqrt{अ-\sqrt{ब}}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}}-\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब}} \end{array}\right\}\text{ हें सिद्ध.}$$

उदाहरणें

(१) ९+√११ याचा एक गुणक काढ असाकीं, जानें करणीपद गुणि लें असतां करणी रूप जाऊन तें अखंड होईल.

(९+√११)×(९−√११)=७०. उत्तर, ९−√११ हा गु.

(२) $\sqrt[4]{६}-\sqrt[4]{२}$ याचा एक गुणक काढ असाकीं, जानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणी रूप जाऊन तें अखंड होईल.

उत्तर, $(\sqrt[4]{६}+\sqrt[4]{२})(\sqrt{६}+\sqrt{२})$ गु.

(३) २+∛१० याचा एक गुणक काढ.

उत्तर, ४−२∛१०+∛१०० गु.

(४) $\sqrt[4]{अ}-\sqrt[4]{ब}$ याचा एक गुणक काढ.

उत्तर, $\sqrt[4]{अ^3}+\sqrt[4]{अ^2ब}+\sqrt[4]{अब^2}+\sqrt[4]{ब^3}$

तेरावा प्रकार.

जा अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी अथवा संयुक्त करणी आहे त. त्यांस बदल अखंड रूप द्यावयाचा.

रीति. जेव्हां अपूर्ण बीजाचे छेद एकाकी करणी आहेत, तेव्हां त्यांचा पूर्ण घात होण्या साठीं जितका गुणक योग्य आहे, तितका अंश छेदांस लावावा. म्हणजे अखंड छेद रूप होईल.

जेव्हां अपूर्ण बीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत तेव्हां बारावे प्रकाराप्रमाणें गुणक काढावा. असा कीं, जाणें छेद गुणिले असतां त्यांचें करणी रूप जाऊन ते अखंड होतील. नंतर त्याणें अंश छेद गुणिले म्हणजे इच्छिलें रूप होईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{७}{\sqrt{३}}$ आणि $\frac{५}{\sqrt{५}+\sqrt{११}}$ यांस बदल अखंड छेदरूप दे.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{७}{\sqrt{३}}\times\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३}}=\frac{७\sqrt{३}}{३}\\&\frac{५}{\sqrt{५}+\sqrt{११}}\times\frac{\sqrt{५}-\sqrt{११}}{\sqrt{५}-\sqrt{११}}=\frac{५\sqrt{५}-५\sqrt{११}}{५-११}\ \text{अ॰}\ \frac{५\sqrt{११}-५\sqrt{५}}{+६}\end{aligned}\right\}\text{उत्तरें.}$$

(२) $\frac{\sqrt{अ}}{५+\sqrt{अ}}$ यांस अखंड छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{२५अ^{\frac{१}{२}}-५अ+अ^{\frac{३}{२}}}{२५-अ}$

(३) $\frac{\sqrt{१४}+\sqrt{१८}}{\sqrt{२}+\sqrt{५}}$ यांस अखंड छेदरूप दे.

गणितप्रमाणआणिश्रेढी.

गणित प्रमाण एकजातीचे दोन पदांचे वजा बाकी वरून त्याचे संबंधी आहे. या वजा बाकीस गणित प्रमाणांत उत्तर ह्मणतात.

जेव्हां पहिलें आणि दुसरें यांचें उत्तर, तिसरें आणि चवथें यांचे उत्तराबराबर आहे, तेव्हांनीं चार पदें प्रमाणांत आहेत-असें ५,९,१२,१९ अथवा अ, अ+क, ब, ब+क

कित्येक पदें एकाच उत्तरानें चढतीं किंवा उतरतीं असलीं, ह्मणजे त्यांस गणित श्रेढी ह्मणावें. असें,

अ, अ+क, अ+२क, अ+३क, अ+४क, अ+५क, इत्यादि

म-४उ, म-३उ, म-२उ, म-उ, म, म+उ, म+२उ इत्यादि.

गणित श्रेढींतील मुख्य अवयव. अतिलहानपद=अ, अति मोठें पद=ब, उत्तर=उ, गच्छ=न, सर्वधन=स

यांतून कोणतेही तीन सांगितले असतां त्यांच्या आधारानें बाकीचे अवयव निघतील. पुढील कोष्टकाप्रमाणें.

+ गणितश्रेढी संबंधीं अनेक विचार दुसरे भागीं लिहिले आहेत ते पहा.

$$अ = झ - ड(न-१) = \frac{२स - नझ}{न} = \frac{२स - ड(न-१)न}{२न}$$

$$झ = अ + ड(न-१) = \frac{स}{न} + \frac{ड}{२}(न-१) = \frac{२स - अन}{न}$$

$$ड = \frac{झ - अ}{न-१} = \frac{२(नझ - स)}{न(न-१)} = \frac{२(स - अन)}{न(न-१)}$$

$$न = \frac{झ - अ + ड}{ड} = \frac{२स}{अ + झ} = \sqrt{\frac{२स}{ड} + \frac{१}{४}\left(\frac{२अ - ड}{ड}\right)^२} - \frac{१}{२}\left(\frac{२अ - ड}{ड}\right)$$

$$स = (अ + झ)\frac{१}{२}न = (झ - \frac{१}{२}ड\cdot\overline{न-१})न = (अ + \frac{१}{२}ड\cdot\overline{न-१})न$$

उदाहरणें.

(१) एका दुकानदारानें ७ बुकें विकलीं, त्यांच्या किंमती गणितश्रेढींत होत्या. अशाकीं, प्रथम बुकाचे किमतीपेक्षां दुसरे बुकाची किंमत ४ शिलिंग अधिक होती; आणि सर्वांत जें महाग होतें त्याची किंमत २५ शिलिंग होती. तेव्हां प्रत्येक बुकाची किंमत काय व एकंदर बुकांची किंमत काय?

$अ = झ - ड(न-१) = २५ - ४(७-१) = १$ आदिपद.

$स = (अ + झ)\frac{१}{२}न = (१ + २५)\frac{७}{२} = ९१$ सर्वधन.

उत्तर { प्रत्ये॰ किंमत १, ५, ९, १३, १७, २१, २५
{ एकं॰ किंमत ९१ शिलिंग

(२) एक गणितश्रेढीमध्यें गच्छ १०० उत्तर १ आणि सर्वधन ५०५० त्या श्रेढीचीं आद्यंतपदें कोणतीं?

$$अ = \frac{२स - ड(न-१)न}{२न} = \frac{१०१०० - १(९९)१००}{२००} = १ \text{ आदिपद.}$$
$$झ = \frac{स}{न} + \frac{ड}{२}(न-१) = \frac{५०५०}{१००} + \frac{१}{२}(९९) = १०० \text{ मोठेंपद.}$$
} उत्तर.

(३) ४५१ इंच उंचीच्या एका खांबावर एक किडा चढत आहे. त्यास पहिले उडीस १ इंच व शेवटील उडीस ५१ इंच मजल मारावयास गणितप्रमाणानें किती उत्तरानें किती उड्या माराव्या लागतील?

$न = \frac{२स}{अ+इ} = \frac{८८२}{४२} = २१$ उडया (गच्छ) आणि $ड = \frac{इ-अ}{न-१} = \frac{४१-१}{२१-१}$
$= २$ उत्तर.

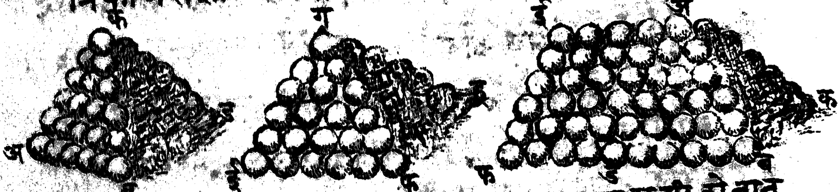
उत्तर, { २ या उत्तरानें २१ उडया माराव्या लागतील.

समाकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशींचें गणित.

व्याख्या.

१ तोफेचे गोळ्यांचा राशी बहुत करून तीन प्रकारें करितात. या सपायांचा आकृतीवरून नावें होतात. तीं. त्रिकोण, चौरस आणि काटकोनचौकोन.

प्रथम आकृति	दुसरी आकृति	तिसरी आकृति.
त्रिकोण राशी.	चौरस राशी.	काट. चौ. राशी.



गोळ्यांचे थर एकावर एक रचिल्या पासून या राशी होतात. पायापासून प्रति थराची रांग एक एक गोळ्यानें उणी होत जाते. त्रिकोण व चौरस राशीचे शिरावर एक एक गोळा असतो आणि पायांतील लांबी बाजूचे एके ओळींतील गोळ्यांत, रुंदी बाजूतील एके ओळीचे गोळे वजा करून बाकी रहातील, त्याहून एक अधिक इतके काटकोनचौकोन राशीचे शिरावर गोळे असतात.

२ त्रिकोण आणि चौरस राशी मध्यें बाजू अथवा मुखें समबाजू त्रिकोण आणि त्यांतील गोळे गणित श्रेढींत आहेत. जींचे प्रथमपद एक, शेवटील पद आणि गच्छ हीं परसंख्ये इतकीं आहेत. आणि क

ह्या त्रिकोणास गणित त्रिकोण ह्मणतात. अबक प्रथम आकृतींतील, आणि इफगह दुसरे आकृतींतील हे गणित त्रिकोण आहेत.

३ चौरस राशीचे मुखावर गणित त्रिकोण ठेविल्या पासून काटकोन चौकोन राशी उत्पन्न होते.

४ अबकड प्रथम आकृति त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथक्करण.— सांगितल्या राशींत गोळ्यांचे थर ६ आहेत आणि त्या प्रत्येकांतील गोळे गणित श्रेढी असून, प्रत्येक थर समबाजू त्रिकोण आहेत. याजकरितां, प्रथम ह्मणजे खालचे थरांतील गोळ्यांची संख्या = (६+१)×३ = २१   चवथे = (३+१)×$\frac{३}{२}$ = ६

दुसरे = (५+१)×$\frac{५}{२}$ = १५   पांचवे = (२+१)×१ = ३

तिसरे = (४+१)×२ = १०   सहावे = (१+१)×$\frac{१}{२}$ = १

सांगितले राशींतील सर्व गोळे ५६

५ इफगह दुसरे चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथक्करण.— सांगितल्या राशींत गोळ्यांचे थर सहा आहेत. याजकरितां, $६^२ + ५^२ + ४^२ + ३^२ + २^२ + १^२ = ९१$ त्या राशींतील सर्व गोळे.

६ अबकडईफ तिसरे काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे? जीत षफ = ११ आणि बक = ६

पृथक्करण.— दिलेली काटकोन चौकोन राशी, अबकड चौरस राशी आणि चार गणित त्तिकोण मिळून झाली आहे. याजकरितां.

चौरस राशींतील गोळे = ५६

चार गणित त्रिकोणांतील गोळे = ८४

काटकोन चौकोन राशींतील गोळे = १५०

पहिली टीप.

या पुढील कोष्टका पासून त्रिकोण आणि चौरस राशी यांचे प्रत्येक थर यांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढतां येईल. अ कोष्टक खालचे थराचे गोळे एकापासून चाळीस पर्यंत दाखवितो. ब कोष्टक प्रत्येक त्रिकोण थरांतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो. क कोष्टक त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो. ड कोष्टक चौरस राशींतील प्रत्येक थराचे गोळे दाखवितो. आणि ई कोष्टक चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

या कोष्टका पासून काटकोन चौकोन राशींतील गोळे थोडक्यांत कळतील. जांत पायाचे थराचे रुंदी बाजूंतील एके रांगेचे गोळे चाळिसां पेक्षां अधिक नसावे. तसेंच लहान आणि मोठे बाजूंतील एके रांगेचे गोळ्यांची वजाबाकी चाळिसांहून अधिक नसावी.

काटकोन चौकोन राशी चौरस राशीवर गणित त्रिकोण ठेविल्या पासून झाली आहे. याजकरितां चौरस राशीचे गोळे ई कोष्टकापासून घ्यावे, आणि एक गणित त्रिकोणाचे गोळे ब कोष्टका पासून घेऊन, त्यांस गणित त्रिकोणाचे संख्येनें गुणून त्यांत चौरसाचे गोळे मिळवावे. म्हणजे काटकोन चौकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या होईल.

क	ब	अ	ड	ई
शंकुसंख्या.	त्रिकोणसंख्या	मूळ अंक.	मूळ अंकांचे वर्ग.	या वर्गांची बेरीज.
१	१	१	१	१
४	३	२	४	५
१०	६	३	९	१४
२०	१०	४	१६	३०
३५	१५	५	२५	५५
५६	२१	६	३६	९१
८४	२८	७	४९	१४०
१२०	३६	८	६४	२०४
१६५	४५	९	८१	२८५
२२०	५५	१०	१००	३८५
२८६	६६	११	१२१	५०६
३६४	७८	१२	१४४	६५०
४५५	९१	१३	१६९	८१९
५६०	१०५	१४	१९६	१०१५
६८०	१२०	१५	२२५	१२४०
८१६	१३६	१६	२५६	१४९६
९६९	१५३	१७	२८९	१७८५
११४०	१७१	१८	३२४	२१०९
१३३०	१९०	१९	३६१	२४७०
१५४०	२१०	२०	४००	२८७०
१७७१	२३१	२१	४४१	३३११
२०२४	२५३	२२	४८४	३७९५
२३००	२७६	२३	५२९	४३२४
२६००	३००	२४	५७६	४९००
२९२५	३२५	२५	६२५	५५२५
३२७६	३५१	२६	६७६	६२०१
३६५४	३७८	२७	७२९	६९३०
४०६०	४०६	२८	७८४	७७१४
४४९५	४३५	२९	८४१	८५५५
४९६०	४६५	३०	९००	९४५५
५४५६	४९६	३१	९६१	१०४१६
५९८४	५२८	३२	१०२४	११४४०
६५४५	५६१	३३	१०८९	१२५२९
७१४०	५९५	३४	११५६	१३६८५
७७७०	६३०	३५	१२२५	१४९१०
८४३६	६६६	३६	१२९६	१६२०६
९१३९	७०३	३७	१३६९	१७५७५
९८८०	७४१	३८	१४४४	१९०१९
१०६६०	७८०	३९	१५२१	२०५४०
११४८०	८२०	४०	१६००	२२१४०

उदाहरणें.

(१) एके त्रिकोणराशींत १५ गोळे आहेत. त्या राशींतील एकंदर गोळे किती?

अ कोष्टकांत १५ चे समोर क कोष्टकांतील ६८० गोळे हें उत्तर.

(२) एक चौरस राशींत खालचे थरांत १५ गोळे आहेत. त्या राशींतील एकंदर गोळे किती?

अ कोष्टकांतील १५ चे समोर ई कोष्टकांतील १२४० गोळे हें उत्तर.

(३) काटकोन चौकोन राशींत रुंदी बाजूचे एके रांगेंत १५ गोळे आणि शिशवर १२ गोळे आहेत, त्या राशींतील एकंदर गोळे किती?

चौरस राशींतील गोळे १२४०

११ गणित त्रिकोणाचे गोळे ... १३२०

एकंदर का॰ चौ॰ राशींतील गोळे २५६० हें उत्तर.

दुसरी टीप.

पुढील सारणी कोष्टकां पासून तीनही राशींतील गोळ्यांची संख्या निघतात.

त्रिकोण राशींतील गोळे $= \frac{(न+२)(न+१)न}{६}$

चौरस राशींतील गोळे $= \frac{(२न+१)(न+१)न}{६}$

का॰ चौ॰ राशींतील गोळे $= \frac{(२न+१+३म)(न+१)न}{६}$

यांत न = थरसंख्या, म = का॰ चौ॰ राशींतील एकोन शिरावरचे गोळे.

या कोष्टकाची उपपत्ति.

अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि कोणत्याही श्रेढीची न पदांपर्यंत बे

रीज करणें तर.

मागील पद पुढील पदांत वजा करून अंतरें घेतलीं आणि या अंतरांची पुनः पुन्हा अंतरें घेतलीं तर, पुढें लिहिल्या प्रमाणें श्रेणी होतील.

ब-अ, क-ब, ड-क, ई-ड, फ-ई इत्यादि प्रथम अंतर परंपरा.

क-२ब+अ, ड-२क+ब, ई-२ड+क, फ-२ई+ड, इ० दु० अं० प०

ड-३क+३ब-अ, ई-३ड+३क-ब, फ-३ई+३ड-क, इ० ति० अं० प०

ई-४ड+६क-४ब+अ, फ-४ई+६ड-४क+ब, इ० च० अं० प०

फ-५ई+१०ड-१०क+५ब-अ, इ० पांचवी अंतर परंपरा.

यावरून समजतें कीं, न व्या अंतर परंपरेंत अ, ब, क, ड इ० पदांस वेळा प्रकाशक कोणत्याही द्वियुक्त पदांतील (न) घाताचा वेळा प्रकाशका बरोबर आहेत. यांत प्रथम, दुसरी, तिसरी इ० परंपरांचीं प्रथम पदें दाखवायास प', प'', प''', प'''', प''''', इ० चिन्हें घेतलीं असतां प'= ब-अ, प''= क-२ब+अ, प'''= ड-३क+३ब-अ इत्यादि.

स्थलां० क० ब=अ+प'. क= २ब-अ+प''

ड= ३क-३ब+अ+प'''. ई= ४ड-६क+४ब-अ+प''''

फ=५ई-१०ड+१०क-५ड+अ+प'''''= अ+५प'+१०प''+१०प'''+५प''''+प'''''

यावरून स्पष्ट आहे कीं, श्रेणीचा (न+१) व्या पदांत अ, प', प'', प''' इ० पदांचे वेळा प्रकाशक कोणत्याही द्वियुक्त पदांतील न घाताचे वेळा प्रकाशकाचे बरोबर आहेत.

यांत दोनही पेट्यांत अ मिळवून बेरीज.

अ+ब+क+ड+ई+फ+इ० = ६अ+१५प'+२०प''+१५प'''+६प''''+प'''''+इ०

यांत स्पष्ट आहे कीं, श्रेढींतील न पदाच्या बेरीजेंत अ, प', प'', प''' इ०

पदांस वेळा प्रकाशक अनुक्रमें कोणत्याही द्विगुकूपदाच्या नघातांतील दुसऱ्या पदापासून नव्या वेळा प्रकाशकाबरोबर होतील.

यास्तव अ+ब+फ+इ० न पदें = नअ + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·प + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·पे + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·$\frac{\text{न}-३}{४}$·पै + इ० सर्वधन अथवा बेरीज.

यांस संबंधनियामक न + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$ + न$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$ + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·$\frac{\text{न}-३}{४}$ + इ० हा आहे.

आतां त्रिकोणराशींतील थरांचे गोळे खालीं लिहिल्या श्रेढींत आहेत. याजकरितां न थरांपर्यंत गोळे किती आहेत?

१ , ३ , ६ , १० , १५, इ० मूळश्रेढी.
  २ , ३ , ४ , ५ , ६ प्रथम अंतरपरंपरा.
    १ , १ , १ , १ दुसरी अंतरपरंपरा.
      ० , ० , ० तिसरी अंतर परंपरा

यांत, प=२ पे=१ पै=० याजकरितां न+२न·$\frac{\text{न}-१}{२}$ + न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$ हें सर्वधन. यांत पदांस समच्छेद करून, $\frac{६\text{न}}{६}$ + $\frac{६\text{न}\cdot(\text{न}-१)}{६}$ + $\frac{\text{न}\cdot(\text{न}-१)\cdot(\text{न}-२)}{६}$; साधारण गुणक काढून, $\frac{\text{न}}{६}$(६+६(न−१) + (न−१)·(न−२)) = प्रत्यक्ष गुणून, $\frac{\text{न}}{६}$(६+६न−६+न^२−३न+२) गुण्यगुणक अवयव करून $\frac{(\text{न}+२)\cdot(\text{न}-१)\cdot\text{न}}{६}$ हा त्रिकोणराशीचा कोष्टक हें सिद्ध.

चौरसराशींतील थरांचे गोळे १,४,९,१६,२५ इ० श्रेढींत आहेत. याजकरितां न थरांपर्यंत गोळे किती आहेत?

१ , ४ , ९ , १६ , २५ इ० मूळश्रेणी
  ३ , ५ , ७ , ९ प्र० अं० प०
    २ , २ , २ दु० अं० प०
      ० , ० ति० अं० प०

यांत प=२, पे=२, पै=०

याजकरितां सर्वगोळे $\text{न} + ३\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२} + २\text{न}\,\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}$ समच्छेद करून व साधा॰ गुणक काढून, $\frac{\text{न}}{६}(६+९(\text{न}-१)+२(\text{न}-१)(\text{न}-२))$ प्रत्यक्ष गुणून व बेरीज करून, $\frac{\text{न}}{६}(२\text{न}^{२}+३\text{न}+१)$ गुण्य गुणक अवयव करून, $\frac{(२\text{न}+१)(\text{न}+१)\text{न}}{६}$ हा वर लिहिलेला चौरस राशीचा कोष्टक हें सिद्ध.

काटकोन चौकोन राशींतील गोळे. जींत रुंदी बाजूंत एके ओळींत न गोळे आहेत आणि म गणित त्रिकोण, ह्मणजे एकोन शिराबरचे गोळे आहेत.

आतां $\frac{(२\text{न}+१)(\text{न}+१)\text{न}}{६}$ चौरस राशीप्रमाणें

$\frac{\text{न}^{२}+\text{न}}{२}$ एक गणित त्रिकोणांतील गोळे, यांस मनें गुणून,

$\frac{\text{न}^{२}\text{म}+\text{न}\text{म}}{२}$ म गणित त्रिकोणांतील गोळे. दोहोंची बेरीज घेऊन, $\frac{(२\text{न}+१)(\text{न}+१)\text{न}}{६}+\frac{\text{न}^{२}\text{म}+\text{न}\text{म}}{२}$ सर्व का॰ चौ॰ राशींतील गोळे. समछेद करून व गुणक काढून $\frac{(२\text{न}+१)(\text{न}+१)\text{न}}{६}+\frac{३\text{न}^{२}\text{म}+३\text{न}\text{म}}{६}=\frac{\text{न}}{६}((२\text{न}+१)(\text{न}+१)+३\text{म}\text{न}+३\text{म})$

प्रत्यक्ष गुणून $\frac{\text{न}}{६}(२\text{न}^{२}+३\text{न}+३\text{म}\text{न}+३\text{म}+१)=\frac{\text{न}}{६}(२\text{न}+१+३\text{म})(\text{न}+१)=\frac{(२\text{न}+१+३\text{म})(\text{न}+१)\text{न}}{६}$ हा वर लिहिलेला काटकोन राशीचा सारणी कोष्टक हें सिद्ध.

उदाहरणें.

(१) जिचे खालचे थरांतील एके ओळींत २० गोळे आहेत, त्या त्रि॰ राशींतील गोळ्यांची संख्या काय होईल? $\frac{२२\times२१\times२०}{६}=१५४०$ हें उत्तर.

(२) जिचे खालचे थराचे एके ओळींत २० गोळे आहेत, त्या चौ॰ राशींतील गोळ्यांची सं॰ काय होईल? $\frac{४१\times२१\times२०}{६}=२८७०$ हें उत्तर.

(३) एका काटकोन चौकोन राशींत थरांची संख्या २० आणि शिरावर १ गोळे आहेत. त्या राशींतील एकंदर गोळे किती होतील?

$\frac{(४०+२५)\times २१\times २०}{६}$ = ४५५० हें उत्तर.

तिसरी टीप.

एक सुगम रीति अशी आहे कीं, जिणें तीनही राशींतील गोळे त्वरेनें निघतात.

त्रिकोण राशींतील (बड+अ+क) $\frac{१}{३}$ बडक

चौरस राशींतील (ईफ+ईफ+ग) $\frac{१}{३}$ गफह

का॰ चौ॰ राशींतील (बफ+बफ+अई) $\frac{१}{३}$ अबक

पायाचे लांबी बाजूंतील एके ओळीचे गोळे, आणि तिशींसमांतर दुसरे एके ओळीचे गोळे एक किंवा अनेक असतील ते, व शिरावरील गोळे, तीनही एकत्र करून, त्यांस रुंदी बाजूंतील एका गणित त्रिकोणाच्या गोळ्यांचा एक तृतियांशानें गुणावें, तो गुणाकार राशींतील गोळे होतील.+

+ ही रीति दुसरे टीपेंत सिद्ध केले कोष्टकापासून उत्पन्न होते.

१ त्रिकोण राशीचा कोष्टक $\frac{(न+२)(न+१)न}{६} = \frac{न^३+३न^२+२न}{६} = (न+१+१)\cdot\frac{न^२+न}{६}$

यांत $\frac{न^२+न}{२}$ हे एक गणित त्रिकोणाचे गोळे. आणि (न+१+१)× $\frac{न^२+न}{६}$ यांत न = बड, १=अ, १=क आणि $\frac{न^२+न}{६}$ = $\frac{१}{३}$ बडक, याजकरितां (बड+अ+क) $\frac{१}{३}$ बडक हें सिद्ध.

२ चौरस राशीचा कोष्टक $\frac{(२न+१)(न+१)न}{६} = \frac{२न^३+३न^२+न}{६} = (न+न+१)\frac{न^२+न}{६}$

यांत न= ईफ, १= ग आणि $\frac{न^२+न}{६}$ = $\frac{१}{३}$ गफह, याजकरितां (न+न+१) $\frac{न^२+न}{६}$ = (ईफ+ईफ+ग) $\frac{१}{३}$ गफह हें सिद्ध.

३ का॰ चौ॰ राशीच्या कोष्टक $\frac{(२न+१+३म)(न+१)न}{६} = (२न+१+३म)\frac{न^२+न}{६}$ यांत न= रुंदी बाजूंतील एके रांगेचे गोळे, म= एकोन शिरावरचे गोळे आणि वरील नियमाप्रमाणें लांबी बाजू = रुंदी बाजू + एकोन शिरावरचे गोळे. म्हणून लांबी बाजू = न+म आणि २ लांबी = २न+२म = बफ+बफ आणि म+१ =

उदाहरणें.

(१) एककाटकोन चौकोन राशी आहे, तिचे शिरावर ११ गोळे आणि लांबी बाजूंत २५ गोळे आहेत. तेव्हां त्या राशींत गोळे किती?

(२५+२५+११)२२ = १३४२ गोळे हें उत्तर.

(२) जर चौरस आणि त्रिकोण राशींतील खालचे थराचे एके ओळींतील प्रत्येकीं २५ गोळे आहेत. त्या राशींत किती किती गोळे आहेत?

चौरस. त्रिकोण.

उत्तर, ५५२५ , २१२५

भूमिति प्रमाण आणि श्रेढी.

भूमितिप्रमाण ह्मणजे एक पद दुसरे पदाचा काय भाव अथवा काय गुणक आहे, असा विचार करितां पदसंबंधी आहे.

घेतले दोन पदांतील प्रथम पदास अग्रसर आणि दुसरे पदास उपाग्रसर ह्मणतात. आणि त्यांचे भागाकारास गुणोत्तर ह्मणतात.

जेव्हां दोन युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे, तेव्हां तीं चार पदें प्रमाणांत आहेत. जसें, अ:अर::ब:बर अथवा ३:७::९:२१

कारण $\frac{अर}{अ}=\frac{बर}{ब}$ आणि $\frac{७}{३}=\frac{२१}{९}$

सिद्धांत.

(१) जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां आद्यंताचा गुणाकार मध्य पदाचे गुणाकाराबराबर आहे. जसें, अ:ब::क:ड

शिरावरचे गोळे = अई आणि $\frac{ब+१}{३}$ = [illegible] अबक याजकरितां (अक+अठ+अई) [illegible] अबक हें सिद्ध.

अथवा $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ या समीकरणास बड नें गुणून अड=बक हें सिद्ध.

कुरलरी+ अ : ब :: ब : क असें असेल तर, ब^2=अक, ब=$\sqrt{अक}$ या पासून असें सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही दोन पदांचें भूमिति मध्यप्रमाण त्या पदांचे गुणाकाराचे वर्गमूळा बरोबर आहे.

(२) जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत तेव्हां त्यां पासून प्रमाणें होतात तीं,

१ समरीतीनें, अ : अर :: ब : बर अथ॰ ३ : ७ :: ९ : २१

२ व्यस्तरीतीनें, अर : अ :: बर : ब अ॰ ७ : ३ :: २१ : ९

३ परावर्त, अ : ब :: अर : बर अ॰ ३ : ९ :: ७ : २१

४ संयुक्त, अ : अ+अर :: ब : ब+बर अ॰ ३ : १० :: ९ : ३०

५ वियुक्त, अ : अर−अ :: ब : बर−ब अ॰ ३ : ४ :: ९ : १२

६ मिश्र, अर+अ : अर−अ :: बर+ब : बर−ब अ॰ १० : ४ :: ३० : १२

७ गुणाकार, अक : अरक :: ब : बर अ॰ ३×९ : ७×९ :: ९ : २१

८ भागाकार, $\frac{अ}{क}$: $\frac{अर}{क}$ :: ब : बर अ॰ $\frac{३}{९}$: $\frac{७}{९}$ :: ९ : २१

जेव्हां श्रेढींतील पदें एकाच गुणोत्तरानें चढत किंवा उतरत आहेत, तेव्हां त्यांस भूमितिश्रेढी म्हणावें. जसें-

१, ३, ९, २७, ८१, २४३ इत्यादि } भूमितिश्रेढी.
अ, अर, अर^2, अर^3, अर^4, अर^5 इत्यादि }

भूमितिश्रेढींतील मुख्य अवयव- अतिमोठें पद=ल, अतिहानपद=अ, गुणोत्तर=र, गच्छ=न सर्वधन=स

यांतील कोणत्याही एक अवयवाची किंमत दुसऱ्या तीन अवयवांचे आधारानें खालीं लिहिल्या सारणीकोष्टकापासून मिळते.

+ कुरलरी शब्दाचा अर्थ पांचवे भागांत पहा.

$$अ = \frac{ञ}{र^{न-1}} = स + र(ञ - स) = \frac{स(र-1)}{र^{न}-1}$$

$$ञ = अ \cdot र^{न-1} = \frac{स(र^{न} - र^{न-1})}{र^{न}-1} = स + \frac{अ-स}{र}$$

$$र = \left(\frac{ञ}{अ}\right)^{\frac{1}{न-1}} = \frac{अ-स}{ञ-स} = \frac{स-अ}{स-ञ}$$

$$न = \frac{ला.\left(\frac{रञ}{अ}\right)}{ला.र} = \frac{ला.र + ला.ञ - ला.अ}{ला.र} = \frac{ला.\left(\frac{ञ(र-र)}{अ}\right)}{ला.र}$$

$$स = \frac{र^{न}-1}{र-1} \times अ = \frac{र^{न}-1}{र-1} \times \frac{ञ}{र^{न-1}} = \frac{रञ-अ}{र-1}$$

जेव्हां श्रेढी अनंत आहे, तेव्हां अति लहान पद अ = ० याजकरितां $स = \frac{रञ}{र-1}$

जेव्हां र सम अपूर्णांक आहे, तेव्हां सर्वधन $स = \frac{1-र^{न}}{1-र} \cdot अ$

जर न अनंत आहे, तर $स = \frac{अ}{1-र}$

उदाहरणें.

(१) एका भूमिति श्रेढीचें प्रथम पद १ गुणोत्तर २ आणि गच्छ ८ तिचें सर्वधन काय होईल?

$स = \frac{र^{न}-1}{र-1} \times अ = \frac{256-1}{2-1} = २५५$ सर्वधन हें उत्तर.

---

* एका भूमिति श्रेढींत (न) पदें आहेत, तर शेवटील पद या प्रमाणें होईल. जसें अ, अर, अर^{2}, अर^{3} .... इत्यादि अर$^{न-2}$, अर$^{न-1}$ यांत अर$^{न-1}$ हें शेवटील पद आहे.

* एका भूमिति श्रेढीची (न) पदां पर्यंत बेरीज करणें आहे. याजकरितां अ + अर + अर^{2} + अर^{3} + ... इ. अर$^{न-2}$ + अर$^{न-1}$ = स या समीकरणाचा प्रथम पदास स्थलां. क. अर + अर^{2} + अर^{3} + ... इ. अर$^{न-2}$ + अर$^{न-1}$ = स - अ, रनें भागून अ + अर + अर^{2} + इ. अर$^{न-3}$ + अर$^{न-2}$ = $\frac{स-अ}{र}$ हें प्रथम समीकरणांत वजा करून अर$^{न-1}$ = स - $\frac{स-अ}{र}$ छे. सो. व स्थलां. क. व साधा. गु. का. अर^{न} = सर - स + अ, स(र-1) = अ(र^{न}-1) गु. लो. $स = अ\left(\frac{र^{न}-1}{र-1}\right)$ हें सिद्ध.

\+ $स = \left(\frac{र^{न}-1}{र-1}\right)अ$ = यांत र सम अपूर्णांक आहे याजकरितां याचा (न) घात एकाहून कमी होऊन र^{न}-1 = -क आणि र-1 = -स असें होतें तेव्हां उणी बाकी तर होती, म्हणून अंश छेदास -1 यानें गुणून $स = \left(\frac{1-र^{न}}{1-र}\right)अ$ हें सिद्ध होतें.

(२) $\frac{१}{२}$ आणि १२८ यांचीं तीन भूमितिमध्यप्रमाणें काढ.

एथें आदि, अंत आणि ३ मध्यपदें मिळून एकंदर ५ पदें आहेत. यांत अतिलहानपद अ $= \frac{१}{२}$ अति मोठें पद ज्ञ $=$ १२८ आणि गच्छ न $=$ ५ आतां ज्ञ $=$ अर$^{न-१}$ ह्मणजे १२८ $= \frac{१}{२}$र^{४}, ह्मे॰सो॰ र^{४} $=$ २५६ ∴ र $=$ ४ गुणोत्तर, याणें लहान पदास गुणून २, ८, ३२ हीं भूमितिमध्यप्रमाणें हें उत्तर.

(३) ९, $-$६, ४ इत्या॰ श्रेढीचें १० पदांपर्यंत सर्वधन काय होईल?

उत्तर, ५ $\frac{६७०}{२१८७}$

(४) एका भांड्यांत ६ शेर दूध होतें. त्यांतून प्रथम १ शेर दूध काढून तितकेंच पाणी घातलें; या प्रमाणें सहा वेळ केलें असतां त्या भांड्यांत दूध किती शेर राहील?

उत्तर, २ $\frac{७३}{७७७६}$ शेर.

(५) $\frac{३}{४}$, $-\frac{१}{२}$, $+\frac{१}{६}$ इ॰ अनंत पदांपर्यंत श्रेढीचें सर्वधन काय होईल?

उत्तर, $\frac{५}{६}$

समीकरण.

व्याख्या.

१ समीकरण ह्मणून बीजगणिताचा एक भाग आहे. जो अव्यक्त पदांच्या किमती, त्यांचा व्यक्त पदांशीं जो संबंध आहे, त्याचे साह्याने काढायाच्या वेगळाल्या रीति आहेत, त्या दाखवितो.

२ किती एक बीजगणित संबंधी उद्देशक बरोबर केल्यापासून

हें होतें या बराबर केलेले उद्देशाकांस समीकरण ह्मणतात.

३ जा पदांपासून समीकरण उत्तम प्रकारें करून बनलें, त्या पदांस समीकरणाचीं पदें ह्मणतात. आणि = या चिन्हाचे दोहोंकडे जे उद्देशक (पदें) लिहिले असतात, त्यांस समीकरणाच्या दोन बाजू ह्मणतात. जसें, ३स + २क = म + स.

४ समीकरणांत जाती अथवा नांवें, त्यांतील अव्यक्तपदाचे सर्वांहून मोठे घात येतात त्यांवरून तशीं होतात.

नांवें	लक्षणें.	उदाहरणें.
एकवर्णसमीकरण.	जांत अव्यक्त पदाचे प्रथम घात येतात.	क्ष + २अ = क − ब.
वर्गसमीकरण.	जांत अव्यक्त पद दोन घाताचें अथ० दोन घातां पर्यंत चढतें आहे.	क्ष^2 + म = अ^2 + व क्ष^2 + अक्ष = क + ड.
घनसमीकरण.	जांत अव्यक्त पद तीन घातांचें अथवा तीन घातांपर्यंत चढतें आहे.	क्ष^3 = अ + क क्ष^3 + अक्ष^2 + बक्ष = ड क्ष^3 + अक्ष = म.
चतुर्घात समीक०	जांत अव्यक्त पद चार घातांचें अ० चार घातां पर्यंत चढतें आहे.	क्ष^4 + क्ष^3 + क्ष^2 + क्ष = अ क्ष^4 + क्ष^2 + क्ष = ब. क्ष^4 + क्ष = व

* समीकरण तीन प्रकारचें आहे. भाराचें, महत्वाचें आणि किमतीचें. जसें, ५ शेर पदार्थ = पांसरीचा दगड, अ० वजन. तसें एक पंचपात्री भर पाणी आणि तीच पंचपात्री भर तूप. तसें ५ शेर गुळाची किंमत चार आणें.

आतां जा समीकरणा विषयीं विचार करणें आहे, तें किमतीचें समीकरण.

५ ज्या समीकरणांत वर्ग, घन, चतुर्घात इ॰ एकेक मात्र येतात त्यां स अनुक्रमें एकाकी वर्गसमीकरण, एकाकी घनसमीकरण, एकाकी चतुर्घातसमीकरण इ॰ ह्मणतात. जसें वर लिहिले उदाहरणांतील $क्ष^{२} + म = अ^{२} + ब$, $क्ष^{३} = अ^{३} + क$, $क्ष^{४} + ६ = क$ इत्यादि.

६ ज्यांत वर्ग, घन, चतुर्घात, इ॰ पर्यंत चढते घात असतात, त्यां स अनुक्रमें संयुक्त वर्गसमीकरण, संयुक्त घनसमीकरण, संयुक्त चतुर्घातसमीकरण इ॰ ह्मणतात. जसें $क्ष^{२} + अक्ष = ब$, $क्ष^{३} + अक्ष^{२} - बक्ष = ड$ इत्यादि.

७ समीकरणाचें मूळ अथवा किंमत ती आहे कीं, जी अव्यक्त पदस्थळीं ठेविली असतां दोनही बाजू बराबर होतील.

८ दिलेल्या समीकरणांतून अव्यक्त पदाची किंमत काढण्याचा जो मार्ग त्यास समीकरणाचें पृथक्करण करणें अथवा समीकरण सोडविणें असें ह्मणतात.

९ एकवर्णसमीकरण अथवा एकाकी दुसरे कोणतेही विषम घाताचें समीकरण यांस मूळ (किंमत) एक असतें, परंतु संयुक्त अनेकवर्णसमीकरणांत अव्यक्त पदाचा जो सर्वांहून मोठा घात असेल तितकीं मूळें आहेत. जसें,

एकाकी एकवर्ण अथवा अनेक वर्णसमीकरण.		संयुक्त अनेकवर्णसमीकरण.	
उदाहरणें.	किंमत.	उदाहरणें.	किंमत.
$३क्ष + २ = ६$ ……	$क्ष = ६$	$क्ष^{२} + २क्ष = १५$ …	$क्ष = ३, -५$
$क्ष^{३} = २७$ ……	$क्ष = ३$	$क्ष^{३} - ९क्ष^{२} + २६क्ष = २४$,	$क्ष = २, ३, ४$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाचीरीति.

जांत अव्यक्त पद एकच आहे.

समीकरणाचें पृथक्करण करणें, ह्मणजे त्याचा दुसऱ्या व्यक्त पदांशीं जो संबंध आहे, तो सोडवून, अव्यक्त पद एके बाजूस आणि दुसरीं व्यक्त पदें एके बाजूस करणें. आणि हें करण्या साठीं वेगळालीं प्रत्यक्ष प्रमाणें आणि कृति अवश्य घेतली पाहिजे. ती पुढे लिहितों.

प्रत्यक्ष प्रमाणें.

१ जर दोन समपदांत एकच पद प्रत्येकांत मिळविलें, तर त्या दोनही बेरजा सम होतील.

२ जर दोन समपदांतून एकच पद प्रत्येकीं वजा केलें, तर त्या दोनही बाक्यासम रहातील.

३ जर दोन सम पदांस सारखे गुणक किंवा भाजक लाविले, तर त्यांचे गुणाकार किंवा भागाकार सम होतील.

४ जर दोन सम पदांतून एका पदांत कोणी एक पद मिळविलें, आणि त्यांतच तेंवजा केलें, तर समत्व राहील.

५ जर दोन सम पदांतून एकास कोणी एक पदानें गुणिलें आणि त्यागुणाकारास त्याणेंच भागिलें, तर समत्व राहील.

६ दोन सम पदांचे वर्गघनादि केले अथवा वर्गादि मूळें काढिलीं तरी समत्व राहील.

हीं सर्व प्रमाणें पुढील प्रकारांवरून उघड होतील.

प्रथमप्रकार.

पदांस स्थळांतर करावयाचा.

रीति. समीकरणाचे कोण तेही पदाचें स्थळांतर (एके बाजूंतून दुसरे बाजूंत नेणें) त्या पदाचें चिन्हबदलकरून होईल. (प०प्र०प्र०)

उदाहरणें.

(१) क्ष+अ=क मूळ समीकरण.

स्थळां०क० क्ष=क−अ हें उत्तर. कारण क्ष+अ = क मूळ समीकरण

$$\begin{array}{rcl} \text{क्ष}+\text{अ} & = & \text{क} \\ -\text{अ} & = & -\text{अ} \quad (\text{२स०म०}) \\ \hline \text{क्ष} & = & \text{क}-\text{अ} \end{array}$$

(२) क्ष+२अक−ड+५* = ई+५ मूळ समीकरण.

क्ष=ई+ड−२अक हें उत्तर.

दुसरा प्रकार.

समीकरणांतील अव्यक्त पदांस गुणक किंवा भाजक असेल तो सोडवायाचा.

प्रथमरीति. गुणक सोडविण्या करितां बाकीचीं सर्व पदें त्या गुणकानें भागावीं.

दुसरी रीति. भाजक सोडविण्याकरितां बाकीचीं सर्व पदें त्या भाजकानें गुणावीं.

उदाहरणें.

(१) $\text{अक्ष}+\text{अ}^{2}=\text{क}$

$\text{क्ष}+\text{अ}=\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ (३म०म०)

$\text{क्ष}=\frac{\text{क}}{\text{अ}}-\text{अ}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{\text{क्ष}}{\text{क}^{2}}+\text{अ}=\text{ब}$

$\text{क्ष}+\text{अक}^{2}=\text{बक}^{2}$

$\text{क्ष}=\text{बक}^{2}-\text{अक}^{2}=\text{क}^{2}(\text{ब}-\text{अ})$

टीप- कोणत्याही समीकरणाचीं चिन्हें बदलतां येतील. कारण (२म०प्र०) त्या समीकरणास −१ यानें गुणिलें.

---

* यापासून निघतेंकीं, जर दोनही बाजूंस पदें एकरूप आणि एकचिन्हानें युक्त असतील तर तीं रद्द करितां येतील.

तिसरा प्रकार.

समीकरणांत अपूर्णबीज पदें असतील त्यांचे छेद सोडवायाचा रीति. प्रति पदाचे छेदांनीं त्या त्या पदा वांचून बाकीच्या सर्व पदांस गुणावें. अथवा सर्व छेदांच्या लघुतम* साधारण गुणाकारानें पूर्व समीकरणास गुणावें. (३ म. म.)

टीप. जर एकच संख्या अथवा पद दोनही बाजूंस साधारण-गुणक किंवा भाजक असेल तर तें रद्द करितां येईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{क्ष}{४}+\frac{क्ष}{५}+अ=१३$

$क्ष+\frac{४}{५}क्ष+४अ=५२$

$५क्ष+४क्ष+२०अ=२६०$

$९क्ष=२६०-२०अ$

$क्ष=\frac{२६०-२०अ}{९}$ हें उत्तर.

(२) $\frac{७क्ष+६}{२८}+\frac{क्ष-३}{४२}+\frac{क्ष}{४}=३\frac{२}{७}$

यांत छेदांचा लघुतम साधारण गुणाकार १६८ याणें गुणून,

$४२क्ष+३६+४क्ष-१२+४२क्ष=५५२$

$क्ष=६$ हें उत्तर.

चवथा प्रकार.

अव्यक्त पद करणीरूप असेल, तर त्याची करणी सोडवायाचा रीति. पक्षांस स्थलांतर करावें असें कीं, करणीरूप अव्यक्त पद, समीकरणाचे एके बाजूस एकाकी राहील. आणि दुसरीं सर्व पदें दुसरे बाजूस होतील. नंतर समीकरणाच्या दोनही बाजू करणीचे घात पर्यंत वाढवाव्या. म्हणजे अव्यक्त पदाची करणी सुटेल. (६ म. म.)

उदाहरणें.

---

* लघुतम साधारण गुणाकाराचें लक्षण, व तो काढण्याची रीति, दुसरे भागीं लिहिली आहे.

(१) $\sqrt{१२+क्ष}+४=८$	(२) $\frac{१२+\frac{मक्ष}{न}}{\frac{अ}{ब}}+क=६$
$\sqrt{१२+क्ष}=४,\ १२+क्ष=१६$ } $क्ष=४$ उ॰	उत्तर,

पांचवा प्रकार.

कोणंत्याही समीकरणांत अव्यक्त पदाचा पूर्ण घात असेल तो सोडवायाचा.

रीति. पूर्व प्रकारांत सांगितल्या प्रमाणें पदास स्थलांतर करून व्यक्त पदें एके बाजूस आणि अव्यक्त पद एके बाजूस करावें. नंतर दोनही बाजूचें त्या अव्यक्त पदाचे पूर्ण घाला पर्यंत मूळ काढावें.

उदाहरणें.

(१) $\frac{३क्ष^३}{७}=१४७$	(२) $\frac{बक्ष^२}{अ}+\frac{अक्ष^२}{ब}=क$
$\frac{क्ष^३}{७}=४९$ } $क्ष^३=३४३$	$क्ष^२\left(\frac{ब}{अ}+\frac{अ}{ब}\right)=क,\ क्ष^२\left(\frac{अ^२+ब^२}{अब}\right)=क$
$क्ष=\sqrt[३]{३४३}$ } $क्ष=७$ हें उ॰	$क्ष^२=\frac{क}{\left(\frac{अ^२+ब^२}{अब}\right)}$ } $क्ष=\sqrt{\frac{अबक}{अ^२+ब^२}}$ हें उत्तर

सहावा प्रकार.

कोणत्याही प्रमाणास समीकरणाचें रूप द्यावयाचा.

रीति. दोन शेवट पदांचा गुणाकार दोन मध्य पदांचे गुणाकारा बराबर करावा. ह्मणजे समीकरणाचें रूप होतें.

उदाहरणें.

(१) $३क्ष^२+५ : ५क्ष^२+२क्ष :: ३ : ५$	(२) $\frac{३क्ष}{२} : अ :: ब : क$
$१५क्ष^२+२५=१५क्ष^२+६क्ष$	$\frac{३कक्ष}{२}=अब$
$क्ष=\frac{२५}{६}$ हें उत्तर.	$क्ष=\frac{२अब}{३क}$ हें उत्तर.

पूर्व प्रकारांचीं वेगळालीं उदाहरणें.

(१) $७क्ष-१२=४क्ष+९$ यांत क्ष या अव्यक्त पदाची किंमत काय? .... $क्ष=७$

(२) $क^{२}क्ष+बक्ष=स$ .... $क्ष=\frac{स}{क^{२}+ब}$

(३) $\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}-\frac{क्ष}{४}=\frac{२१}{१८}$ .... $क्ष=२$

(४) $क्ष^{\frac{२}{३}}+२क्ष^{\frac{१}{३}}=क^{२}$ .... $क्ष=(२क^{२})^{म}$

(५) $अक्ष^{२}+क=१२+\frac{क^{२}}{अ}$ .... $क्ष=\left(\frac{१२अ+क^{२}-अक}{अ^{२}}\right)^{\frac{१}{२}}$

(६) $१२-क्ष : १२+क्ष :: क्ष : \frac{१}{२}$ .... $क्ष=४$

(७) $३क्ष^{३}+५क्ष^{२} : ५क्ष^{३}+७क्ष^{२} :: १:५$ .... $क्ष=\sqrt{\frac{१}{२}}$

(८) $\sqrt{४+क्ष}=४-\sqrt{क्ष}$ .... $क्ष=२\frac{१}{४}$

(९) $२क्षसक्ष=क्षक्ष$ .... $क्ष=\frac{१}{२}$

(१०) $\sqrt{त+क्ष}-\sqrt{त-क्ष}=२\sqrt{\frac{क्ष}{त+क्ष}}$ .... $क्ष=१\frac{१}{१६}$

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाच्या रीती.

जेव्हां वेगळाले समीकरणांत दोन अव्यक्त पदें आहेत.

प्रथमरीति. प्रत्येक समीकरणांत एका अव्यक्त पदाची किंमत काढून, त्या दोन किंमती बराबर लिहिल्या पासून एक नविन समीकरण उत्पन्न होईल. जांत अव्यक्त एकच येईल. नंतर या ची किंमत पूर्व प्रकारां प्रमाणें निघेल.

टीप. जा अव्यक्त पदाची किंमत काढावयास सुगम आहे, त्या पासून किंमत काढावयास आरंभ करावा.

दुसरीरीति. दोनही समीकरणांत जें अति सोईचें असेल, त्यां त एक अव्यक्त पदाची किंमत काढून, ती दुसरे समीकरणांत अव्यक्त पद स्थळीं ठेवावी. यापासून नविन समीकरण उत्पन्न

होईल. यांत एकच अव्यक्त पद येईल. त्यांची किंमत पूर्व प्रकारां प्रमाणें निघेल.

तिसरी रीति. सांगितलीं दोन समीकरणें तशाच संख्येनें किंवा पदानें गुणावी किंवा भागावी, अशी कीं, दोहोंत ही एक अव्यक्त पद बरोबर होईल नंतर त्या बरोबर अव्यक्त पदांचीं चिन्हें विरूप असल्यास दोनही समीकरणाची बेरीज आणि सरूप असल्यास दोहोंची वजाबाकी करावी. यापासून एक नविन समीकरण उत्पन्न होऊन, किंमत निघेल.

टीप. विषम वेळा प्रकाशक पदें समवेळा प्रकाशक करणें तर, परस्परांस परस्परांचे वेळा प्रकाशक गुणक लावावे.

उदाहरणें.

(१) ११क्ष+३य=१००, ४क्ष−७य=४ यांत क्षची व यची किंमत काय?

दोहोंत क्ष = किंमती काढून $\frac{१००-३य}{११}$, $\frac{४+७य}{४}$, या दोनही किमती परस्पर जो. $\frac{१००-३य}{११} = \frac{४+७य}{४}$, छेद सोड. ४००−१२य=४४+ +७७य स्थलां. क. ८९य=३५६ ∴ य=४ ही किंमत क्ष=$\frac{१००-३य}{११}$ यांत ठेवून, क्ष=८ उत्तर, क्ष=८ य=४

(२) $\frac{क्ष}{२}+\frac{य}{३}=७$, $\frac{क्ष}{३}+\frac{य}{२}=८$ यांत क्षची व यची किंमत काय?

दोनही समीकरणांचे छे. सो. ३क्ष+२य=४२, २क्ष+३य=४८ क्षच्या दोनही कि. जो. $\frac{४२-२य}{३}=\frac{४८-३य}{२}$, छे. सो. ८४−४य=१४४−९य स्थलां. क. ५य=६० ∴ य=१२, क्ष=६ हें उत्तर.

(३) क्ष+१५य=५३, य+३क्ष=२७ यांत क्षची व यची किं. काय?

क्ष=५३-१५य ही किं० दु० समी० ठे० य+१५९−४५य=२७
स्थलांतरक० ४४य = १३२, य=३ क्ष=८ हें उत्तर.

(४) $\frac{क्ष}{८}$ + ८य = १९४, $\frac{य}{८}$ + ८क्ष = १३१ यांत क्षची व यची किं० काय?
छे० सो० क्ष+६४य=१५५२, य+६४क्ष=१०४८ } क्ष=१५५२−६४य
ही किंमत दुसरे समीकरणांत ठेवून य+९९३२८−४०९६य=१०४८
स्थलां० क० ४०९५य= ९८२८०. य=२४ क्ष=१६ हें उत्तर.

(५) $\frac{क्ष}{७}$+७य=९९, $\frac{य}{७}$+७क्ष=५१ यांत क्षची यची किंमत काय?
दोनही समीकरणास ७नीं गुणून, क्ष+४९य=६९३, य+४९क्ष=३५७
बेरीजक० ५०क्ष + ५०य =१०५० अथवा क्ष + य=२१ हें दु० समी
क० वजाक० (य+४९क्ष=३५७) − (क्ष+य=२१)= ४८क्ष=३३६

उत्तर, क्ष=७ य=१४

(६) २क्ष+ $\frac{७}{३}$ य=२२, ११य− $\frac{२}{५}$क्ष=२० यांत क्षची व यची किं० काय?
प्र० स० छे० सो०, ६क्ष+७य=४४, दु० स० छे० सो० ५५य−२क्ष=१००
दु० स० ३नीं गुणून, (−६क्ष+१६५य=३००) + प्र० स० (६क्ष+७य=४४)
= १७२य= ३४४ } य=२ क्ष=५ हें उत्तर.

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाचीरीति.

जेव्हां समीकरणांत तीन अव्यक्त पदें आहेत.

प्रथमरीति. प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किंमत दुसरीं अव्यक्त पदें व्यक्त मानून काढावी. नंतर प्रथम किंमत दुसरीचे बराबर आणि प्रथम किंवा दुसरी तिसरीचे बराबर करावी; ह्मणजे दोन नवीं समीकरणें होतील. त्यांची किंमत पूर्वप्रमाणें निघेल. आणि यापासून तिसऱ्या अव्यक्त पदाची किंमत निघेल.

दुसरी रीति. एक समीकरणांत एक अव्यक्त पदाची किंमत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्यात्या अव्यक्त पदस्थळीं लिहून, नवीं दोन समीकरणें उत्पन्न होतील, त्यांची किंमत पूर्वीप्रमाणें निघेल.

तिसरी रीति. एकेक समीकरण, तशी संख्या किंवा अक्षर चिन्ह याणें गुणावें किंवा भागावें कीं, जापासून त्या सर्व समीकरांत एक अव्यक्त पद बरोबर होईल. नंतर या तीन समीकरणांतून कोणतींही दोन तिसऱ्यांत वजा करावीं. अथवा मिळवावीं. अशी कीं, जेणें करून एक अव्यक्त पद व एक समीकरण कमी होईल. नंतर दोन समीकरणापासून दोन अव्यक्तपदांच्या किमती निघतील.

या प्रमाणें चार, पांच किंवा त्याहून अधिक अव्यक्त पदें असलीं तरी त्यांची किंमत काढतां येईल.

वर जा समीकरणाच्या रीति लिहिल्या, त्याशिवाय थोडक्यांत आणि अति सोपी अशी एक रीति आहे; ती बीज गणिताचा अति अभ्यास केल्यावर आपोआप प्रकट होईल.

उदाहरणें.

(१) क्ष+य+ज्ञ=२१, क्ष+य−ज्ञ=२५, क्ष−य−ज्ञ=९ यांत क्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

प्र.स.कि. क्ष=२१−य−ज्ञ, दु.स.किं. क्ष=२५−य+ज्ञ, ति.स.किं. क्ष=९+य+ज्ञ, प्रथ. आणि दु. किं. जो. २१−य−ज्ञ=२५−य+ज्ञ, स्थलां. क. २ज्ञ=−४, ज्ञ=−२ ही किंमत दु. व ति. यांत नि.

−य+२८ = य+१२, स्थलां॰ क॰ २य=१६, य=८

क्ष=२५−य+ज्ञ यांत किंमतीठे॰ क्ष=२० य=८ ज्ञ=३ हें उत्तर.

(२) क्ष+य−ज्ञ=८, २क्ष+य+३ज्ञ=३१, ३क्ष+२य+४ज्ञ=४७ यांत क्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

क्ष=८+ज्ञ−य ही किंमत दुस॰ आणि ति॰ समीकरणांत लि॰

१६+२ज्ञ−२य+य+३ज्ञ=३१ } य=५ज्ञ−१५
२४+३ज्ञ−३य+२य+४ज्ञ=४७ } य=७ज्ञ−२३

किं॰ जोडून, ५ज्ञ−१५=७ज्ञ−२३ स्थ॰ क॰ २ज्ञ=८ } ज्ञ=४

उत्तर, क्ष=७ य=५ ज्ञ=४

(३) ३क्ष+२य−ज्ञ=२०, २क्ष+३य+६ज्ञ=७०, क्ष−य+६ज्ञ=४१ यांत क्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

दु॰ व ति॰ यांची बे॰ घे॰ ३क्ष+२य+१२ज्ञ=१११ यांत प्र॰ वजा क॰ १३ज्ञ=९१ ∴ ज्ञ=७ ही किं॰ ति॰ स॰ लि॰ क्ष−य+४२=४१ स्थलां॰ क॰ क्ष−य=−१ दु॰ व ति॰ यांची वजा॰ करून क्ष+४य=२९ यांत क्ष−य=−१ वजा करून, ५य=३० } य=६, क्ष=५

उत्तर, क्ष=५ य=६ ज्ञ=७

सोडवावयाकरितां समीकरणें.

(१) (क्ष²−य²)(क्ष−य)=३क्षय } (क्ष⁴−य⁴)(क्ष²−य²)=४५क्ष²य² } यांत क्षची व य ची किंमत काय? य=२, ४ क्ष=४, २

(२) क्ष²य+क्षय²=३० } $\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{य}=\frac{५}{६}$ } यांत क्षची व यची किंमत काय? क्ष=१, −६, ३, २ य=−६, १, २, ३

(३) √क्ष−√य=√क्ष(√क्ष+√य) } (क्ष+य)² = २(क्ष−य)² } यांत क्षची व यची किंमत काय? क्ष=३+२√२ य=१

(४) $\begin{cases} \frac{२}{३}\sqrt{४य-क्ष}+\frac{१}{२}\sqrt{य-क्ष}=\sqrt{२य-क्ष} \\ \frac{२}{३}\sqrt{क्ष^२-६य}+\sqrt{य^२-९क्ष} : \sqrt{क्ष^२-६य} :: १\frac{२}{३} : १ \end{cases}$ यांत क्षची व यची किं० $\begin{cases} क्ष=७ \\ य=८ \end{cases}$

(५) $\begin{cases} ३-\frac{७+\frac{२क्ष}{य}}{५}=५-\frac{५क्ष+१}{३य} \\ य-\frac{४+१५य}{६क्ष-२}=\frac{२क्षय-\frac{१०७}{८}}{२क्ष+५} \end{cases}$ यांत क्षची व यची किंमत काय? $\begin{cases} क्ष=२ \\ य=३ \end{cases}$

(६) $\begin{cases} \frac{क्ष-६}{७य}+\frac{४क्ष+७}{२४}-\frac{७क्ष-य}{४२}=\frac{१९+य}{४२}-\frac{३१क्ष+६}{५६य} \\ १२क्ष-१५य+\frac{२२}{४} : १०य-८क्ष+\frac{८६}{५} :: ३क्ष-\frac{८५}{?} : ६क्ष-\frac{१५}{?} \end{cases}$ यांत क्षची व यची किं०

उत्तर, क्ष=९, य=७

(७) $\begin{cases} ४क्ष+३य+\frac{२४+\frac{११}{२}य}{२क्ष+१}=\frac{१६क्ष^२+१२क्षय-८क्ष+५य+२८}{१०} \\ २क्ष+४=३य+\frac{८क्ष^२-१८य^२+१०८}{४क्ष+६य+३} \end{cases}$

यांत क्षची व यची किंमत काय? उत्तर, क्ष=३, य=२

(८) $\begin{cases} \frac{१}{क्ष}+\frac{१}{य}=\frac{१}{?} \\ \frac{१}{क्ष}+\frac{१}{ज्ञ}=\frac{?}{?} \\ \frac{१}{य}+\frac{१}{ज्ञ}=\frac{?}{?} \end{cases}$ यांत क्ष, य, ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काय? $\begin{cases} क्ष=२ \\ य=२ \\ ज्ञ=४ \end{cases}$

(९) $\begin{cases} \frac{५क्ष+३य+ज्ञ}{६०}-\frac{२य+२ज्ञ-क्ष+१}{१५}=५+\frac{क्ष-ज्ञ-५}{६} \\ \frac{२क्ष+५य-३ज्ञ}{१२}-\frac{२क्ष+य-३ज्ञ}{४}=\frac{७य+ज्ञ+३}{११}+\frac{१}{२} \\ \frac{५य+३ज्ञ}{४}-\frac{२क्ष+३य-३ज्ञ}{१२}+२ज्ञ=य-१+\frac{३क्ष+२य+३}{६} \end{cases}$

यांत क्ष य ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काय? $\begin{cases} क्ष=९ \\ य=७ \\ ज्ञ=२ \end{cases}$

(१०) $क्ष^५+क्ष^४+क्ष^३+क्ष^२-२०क्ष=२०$ यांत क्षची किं० काय? { क्ष=±२

(११) $\begin{cases} अक्ष+बय=अ^२ \\ बक्ष-अज्ञ=ब^२ \\ कक्ष-डस=क^२ \\ डय-कज्ञ=ड^२ \end{cases}$ यांत क्ष, य, ज्ञ आणि स या अव्यक्त पदांची किंमत काय?

एकवर्णसमीकरणाचे प्रश्न.

(१) अ आणि ब या दोघांस ५:३ अशा प्रमाणानें कांहीं द्रव्य वांटून दिलें; त्यांत अला मिळालेलें द्रव्य, सर्व द्रव्याच्या ५/९ पेक्षां ५० पौंड अधिक होतें; तर प्रत्येकास किती किती द्रव्य मिळालें तें सांग?

अ=५क्ष पौंड, तर ब=३क्ष पौंड आणि सर्व द्रव्य ८क्ष पौंड, तर प्रश्नाप्रमाणें, ५क्ष=५/९(८क्ष)+५० अथवा ४५क्ष=४०क्ष+४५०

स्थ० क० ५क्ष=४५० ∴ क्ष=९० तेव्हां ४५० पौं० अला आणि २७० पौं० बला. उ०

(२) कोणा एका धनगराजवळ मेंढ्यांचे दोन कळप होते, त्यांतील ल्हान कळपांत सर्व मेंढ्या होत्या व मोठे कळपांत सर्व मेंढे होते. नंतर दर मेंढीनें दोन दोन कोंकरें घातलीं. पुढें असें समजलें कीं, कोंकरांची संख्या दोन कळपांच्या अजाबाकी बरोबर होती. व त्याजवळ जर सर्व मेंढ्याच असत्या आणि प्रत्येक मेंढी तीन तीन कोंकरें घालती तर, त्याजवळ एकंदर ४३२ जीव झाले असते. तर प्रत्येक कळपांत किती किती जीव होते?

ल० क० मो० क०
उत्तर, २७ , ८१

(३) कोणी एका उदम्यानें ३०० पौंडांस ९ घोडे व ७ गाई विकल्या, दुसऱ्या वेळेस तितक्याच किमतीस ६ घोडे व १३ गाई विकल्या; तर प्रत्येक घोड्याची व गाईची किंमत काय होती?

घो० पौं० गा० पौं०
उत्तर, २४ , १२

(४) कोणी एका सावकारानें एक रेशमाचें वस्त्र १६ पौंड ४ शिलिंगास विकत घेतलें. त्याचा दर याडीस जितके शिलिंग पडले त्यांचें, व तें कापड जितके यार्ड लांब होतें त्याचें प्रमाण असें होतें कीं, ४:९, तर-

त्या कापडाचा दर काय? व तें किती लांब होतें? लां·या· दर यार्डी शि·
उत्तर, २७ , १२

(५) भूमीचे दोन तुकडे चौरसाकृति आहेत. त्यांत एकाची एक बाजू दुसऱ्याचा एके बाजूपेक्षां १० यार्ड लांब आहे, व त्यांचा क्षेत्रफळाचें प्रमाण २५:९ असें आहे. तर त्यांचा बाजूची लांबी किती होती?
ल·चौ· मो·चौ·
उत्तर, १५ , २५

(६) एक स्त्री आणि एक पुरुष अशीं दोघें एक हांडा पाणी १५ दिवसांत पितात आणि तीं दोघें मिळून ६ दिवस त्यांतील पाणी प्याली; नंतर पुरुष दुसरे गांवीं गेला, तेव्हां बाकी राहिलेलें पाणी स्त्रीस ३० दिवस पुरलें. तर स्त्री किंवा पुरुष यांतून प्रत्येकास तें पाणी किती किती दिवस पुरेल?
पु·दि· स्त्री·दिवस·
उत्तर, २१ ३/४ , ५०

(७) दोन गाड्या ओझीं लादलेल्या होत्या तेव्हां ओझ्या सुद्धां त्यांचा वजनाचें प्रमाण ४:५ असें होतें. पुढें त्या गाड्यांतून ६:७ या प्रमाणानें कांहीं ओझें काढिलें, तेव्हां बाकी राहिलेल्या ओझ्यांचें प्रमाण २:३ झालें. आणि त्या दोनही गाड्यांचे वजनाची बेरीज १० टन होती; तर पहिल्यानें त्यांचें वजन किती किती होतें तें सांग?

उत्तर, { पहि· गा· व· ४ध, दु· गा· व· ५· टन· | पहि· तींतून १ २ व दु· रीं तून १ ४ ओ· का·

(८) १९ मोहोरा आणि ६ पुतळ्या यांणीं एक पिशवी भरली व ४ मोहोरा आणि ५ पुतळ्यांनीं तिचे [illegible] भरतात, तर तीन मोहोरा व पुतळ्या प्रत्येकीं किती किती रहातील?

मो पु
उत्तर, २१, ६२

(९) गणित प्रमाणांत त्याचार संख्या काय आहेत? कीं पहिली : चवथी :: १ : २ आणि दुसरी : तिसरी :: $\frac{३}{४}$: $\frac{५}{६}$ आणि त्याचोहोंची बेरीज व $\frac{३}{४}$ = ४ होतात. तेव्हां त्या संख्या कोणत्या?

उत्तर, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, १, १$\frac{१}{२}$

(१०) अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळावयास बसले. त्यांत अ चे जवळ ८७० रुपये आणि ब चे जवळ ६९० रु० हे खेळाचे आरंभीं होते. पुढें खेळांत परस्परांची हारजिंक होऊन शेवटास उठून गेले; तेव्हां असें प्रमाण झालें कीं, अची शिल्लक : बची शिल्लक :: १७ : १३ याजवरून कोण किती हारला?

उत्तर, १४ रु० ब हारला.

वर्गसमीकरण.

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे.

एकाकी वर्गसमीकरणांत अव्यक्त पदाचा वर्ग मात्र येतो. जसें, अक्ष² = ब या समीकरणाचे पृथक्करणाच्या रीति एक वर्णसमीकरणांत सांगितल्या आहेत.

संयुक्त वर्गसमीकरण ह्मणजे ज्यांत अव्यक्त पदाचा द्विघात व प्रथम घात येतो. जसें, अक्ष² + बक्ष = क.

संयुक्त वर्गसमीकरणास पूर्वीं सांगितले प्रकारांप्रमाणें स्थळांतरादिकरून सरळ करावें असें कीं, तें पुढें लिहिलेले तीन सारणीकोष्टकांतून एके सारणी कोष्टकाचे जातीचें होईल. जसें,

क्ष^2+अक्ष=ब, क्ष^2−अक्ष=ब, क्ष^2−अक्ष=−ब म्हणजे यांत वर्ग-पदास गुणक, भाजक, करणी, किंवा उणें चिन्ह यांतून कोणतेंही नसावें.

वर्ग समीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति अशी आहे, तीस वर्ग पूरणीकरण म्हणतात. ती—

रीति. समीकरणास सरळ केल्या नंतर दुसरे पदाचे वेळा प्रकाशका चे अर्धाचा वर्ग दोनही बाजूंत मिळवावा, म्हणजे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग होईल; नंतर दोनही बाजूंचें वर्गमूळ काढिल्यानें अव्यक्त पदाची किंमत निघेल.

व्यक्त बाजूचें मूळ (±) असें मानावें, म्हणजे अव्यक्त पदाचा दोन किमती निघतील.[+]

वर्ग समीकरणें जांत अव्यक्त पदांचीं दोन पदें येतात. आणि प्रथम पदाचा घात प्रकाशक दुसरे पदाचे घात प्रकाशकाचे दुप्पट आहे. तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वी प्रमाणें वर्ग समीकरण रीतीनेंच होतें. जसें, क्ष^{२न}+अक्ष^न=म अथवा क्ष+२√क्ष=अ

इत्यादि हीं वर्ग समीकरणाच्या जातीचीं जाणावीं

+ कोणत्याही पदाचें वर्गमूळ धन किंवा ऋण असतें. असें न^2 याचें वर्गमूळ +न किंवा −न आहे; कारण दोहोंचाही वर्ग +न^2 असा होतो. परंतु +न किंवा −न या दोहोंचाही वर्ग −न^2 होत नाहीं, याजकरितां −न^2 याचें वर्गमूळ अशक्य आहे.

प्रथम सारणी कोष्टकांत क्ष^2+अक्ष=ब आहे, याजकरितां क्ष+½अ=±√(ब+¼अ^2) कारण बराबरीचे धन, ऋण या दोनही पदाचा वर्ग ब+¼अ^2 असा होतो. तेव्हां क्ष=±√(ब+¼अ^2)−½अ यांत क्षची प्रथम किंमत क्ष=√(ब+¼अ^2)−½अ ही सर्वदा धन आहे. आणि दुसरी क्ष=−√(ब+¼अ^2)−½अ सर्वदां ऋण आहे.

दु. सा. कोष्टकांत क्ष^2−अक्ष=ब आहे तेव्हां वर सांगितल्या प्र. क्ष=√(ब+¼अ^2)+½अ क्षची प्र. किं. सर्वदा धन आणि क्ष=−√(ब+¼अ^2)+½अ ही दु. किं. सर्वदां ऋण आहे.

ति. सा. को. क्ष^2−अक्ष=−ब यांत ¼अ^2 हे ब हून अधिक आहेत, तेव्हां क्षचा दोन किंमती =±√(¼अ^2−ब)+½अ या धन. आणि ¼अ^2 हे ब हून कमी आहेत, तेव्हां क्षच्या दोन किमती क्ष=±√(¼अ^2−ब)+½अ या अशक्य आहेत. कारण ऋण पदाचें वर्गमूळ अशक्य आहे.

उदाहरणें.

(१) $\text{क्ष}^{२}+६\text{क्ष}=७२$ या वर्गसमीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

मूळसमीकरण. $\text{क्ष}^{२}+६\text{क्ष}=७२$,

वर्गपुरा करून, $\text{क्ष}^{२}+६\text{क्ष}+९=८१$

मूळ काढून, $\text{क्ष}+३=\pm ९$

३ यांस स्थळांतर करून, $\text{क्ष}=६,\ -१२$ उ०

(२) $\frac{३}{२}\text{क्ष}^{२}+८\text{क्ष}=१६०$ यांत क्षची किं०

गु० व भा० सो०; $\text{क्ष}^{२}+\frac{१६}{३}\text{क्ष}=\frac{३२०}{३}$

वर्गपुरा क०, $\text{क्ष}^{२}+\frac{१६}{३}\text{क्ष}+\frac{६४}{९}=\frac{१०२४}{९}$

मूळ काढून, $\text{क्ष}+\frac{८}{३}=\pm\frac{३२}{३}$

$\frac{८}{३}$स स्थ० क०, $\text{क्ष}=८,\ -\frac{४०}{३}$ हें उ०

(३) $\text{अ}\text{क्ष}^{२}+\text{क}\text{क्ष}=\text{ड}$ या वर्गसमीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

गु० सो० $\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{क्ष}=\frac{\text{ड}}{\text{अ}}$

वर्गपु० $\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{क}}{\text{अ}}\text{क्ष}+\frac{\text{क}^{२}}{४\text{अ}^{२}}=\frac{४\text{अड}+\text{क}^{२}}{४\text{अ}^{२}}$

मूळका० $\text{क्ष}+\frac{\text{क}}{२\text{अ}}=\pm\frac{१}{२\text{अ}}\sqrt{४\text{अड}+\text{क}^{२}}$

स्थ० क० $\text{क्ष}=\frac{\sqrt{४\text{अड}+\text{क}^{२}}-\text{क}}{२\text{अ}}$ हें उ०

(४) $\text{क्ष}+\text{अ}\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}=\text{ड}$ या वर्गसमीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

वर्गपु० $\text{क्ष}+\text{अ}\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}+\frac{१}{४}\text{अ}^{२}=\frac{४\text{ड}+\text{अ}^{२}}{४}$

मूळका० $\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}+\frac{१}{२}\text{अ}=\pm\frac{१}{२}\sqrt{४\text{ड}+\text{अ}^{२}}$

स्थ० क० $\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}=\pm\frac{१}{२}\sqrt{४\text{ड}+\text{अ}^{२}}-\frac{१}{२}\text{अ}$

वर्ग क० $\text{क्ष}=\frac{२\text{ड}+\text{अ}^{२}}{२}\mp\frac{\text{अ}}{२}\sqrt{४\text{ड}+\text{अ}^{२}}$ उ०

(५) $४\text{क्ष}^{४}+\text{अ}\text{क्ष}^{२}$ यांत क्षची किंमत काय?

छे० सो० $\text{क्ष}^{४}+\frac{\text{अ}}{४}\text{क्ष}^{२}=\frac{\text{स}}{४}$

वर्गपु० क० $\text{क्ष}^{४}+\frac{\text{अ}}{४}\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{अ}^{२}}{६४}=\frac{१६\text{स}+\text{अ}^{२}}{६४}$

मूळका० $\text{क्ष}^{२}+\frac{\text{अ}}{८}=\pm\frac{१}{८}\sqrt{१६\text{स}+\text{अ}^{२}}$

स्थ० क० व मूळका० $\text{क्ष}=$
$\left(\pm\frac{१}{८}\sqrt{१६\text{स}+\text{अ}^{२}}-\frac{\text{अ}}{८}\right)^{\frac{१}{२}}$

(६) $\text{क्ष}^{३}-\text{क्ष}^{२}=४$ यांत क्षची किंमत काय? मू० स० $\text{क्ष}^{३}-\text{क्ष}^{२}=४$ यास ४नीं गुणून, त्यांत $\text{क्ष}^{४}+४\text{क्ष}^{२}=\text{क्ष}^{४}+४\text{क्ष}^{२}$ हे मि० $\text{क्ष}^{४}+४\text{क्ष}^{३}+४\text{क्ष}^{२}=\text{क्ष}^{४}+८\text{क्ष}^{२}+१६$

मूळका० $\text{क्ष}^{२}+२\text{क्ष}=\text{क्ष}^{२}+४$, स्थ० क० $२\text{क्ष}=४$ ∴ $\text{क्ष}=२$ हें उत्तर.

(७) $\text{क्ष}^{२}-३\text{क्ष}=२८$, $\text{क्ष}^{२}-३\text{क्ष}+\frac{९}{४}=\frac{१२१}{४}$, $\text{क्ष}-\frac{३}{२}=\pm\frac{११}{२}$, $\text{क्ष}=७,\ -४$ हें उ०

(८) $\frac{3}{2}\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}+\frac{2\text{क्ष}^2+\text{क्ष}}{4}=\frac{63}{4}$ यांत क्ष अव्यक्त पदाची किं० काय?

मूळ समीकरण दोहोनीं गु० $3\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}+\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}=\frac{63}{2}$

प्रत्येक बाजूंत $\frac{17}{2}$ मिळवून $(\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2})+3\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}=40$

वर्ग पुरा करून, $(\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2})+3\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}+\frac{9}{4}=\frac{169}{4}$

मूळ काढून, $\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}+\frac{3}{2}=\pm\frac{13}{2}$ स्थ० क० $\sqrt{\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}}=5$ किं० -8

वर्ग क० $\text{क्ष}^2+\frac{\text{क्ष}}{2}+\frac{17}{2}=25$ किंवा 64, स्थलां० क० व वर्ग पु० करून,

उत्तर, $\text{क्ष}=5,\ -\frac{11}{2}$ किंवा $\frac{-1\pm\sqrt{919}}{4}$

(९) $\left(\frac{1+\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}}\right)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1-\text{अ}}{1+\text{अ}}}\times\sqrt[4]{\frac{1-\text{क्ष}}{1+\text{क्ष}}}=2\sqrt{\frac{1-\text{अ}}{1+\text{अ}}}$ या वर्गसमीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काढ.

मूळ समीक० $\frac{\sqrt[4]{1+\text{क्ष}}}{\sqrt[4]{1-\text{क्ष}}}$ यानें गुणून, $\frac{\sqrt{1+\text{क्ष}}}{\sqrt{1-\text{क्ष}}}+\sqrt{\frac{1-\text{अ}}{1+\text{अ}}}=2\sqrt{\frac{1-\text{अ}}{1+\text{अ}}}\times\frac{\sqrt[4]{1+\text{क्ष}}}{\sqrt[4]{1-\text{क्ष}}}$

स्थ० क०, मू० का० नंतर स्थ० क०, चतुर्घातक० $\frac{1+\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}}=\frac{1-\text{अ}}{1+\text{अ}}$ ∴ $\text{क्ष}=-\text{अ}$ हें उ०

(१०) $\frac{4}{\text{क्ष}^3}+\frac{4}{\text{क्ष}^2}=\frac{\text{अ}-1}{\text{क्ष}}+\frac{\text{अ}^2\text{क्ष}}{2}+\frac{\text{अ}}{2}$ या समीकरणांत क्षची किं० काढ.

क्षनें भागून, $\frac{4}{\text{क्ष}^4}+\frac{4}{\text{क्ष}^3}+\frac{1}{\text{क्ष}^2}=\frac{\text{अ}}{\text{क्ष}^2}+\frac{\text{अ}^2}{2}+\frac{\text{अ}}{2\text{क्ष}}=\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)^2=\frac{\text{अ}}{2}\times$

$\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)+\frac{\text{अ}^2}{2}$, स्थ० क० $\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)^2-\frac{\text{अ}}{2}\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)=\frac{\text{अ}^2}{2}$

वर्ग पुराक०; $\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)^2+\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)+\frac{\text{अ}^2}{16}=\frac{9}{16}\text{अ}^2$

मूळ काढून, $\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)-\frac{\text{अ}}{4}=\pm\frac{3}{4}\text{अ}$ ∴ $\left(\frac{2}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{\text{क्ष}}\right)=\text{अ}$ किं० $-\frac{\text{अ}}{2}$

२नीं भागून, $\frac{1}{\text{क्ष}^2}+\frac{1}{2\text{क्ष}}=\frac{\text{अ}}{2}$ किंवा $-\frac{\text{अ}}{4}$ पुन्हा वर्ग पुराक० वर्गमू० का०

$\text{क्ष}=\frac{4}{\pm\sqrt{8\text{अ}+1}}$, $\frac{4}{\pm\sqrt{-4\text{अ}+1}-1}$ हें उत्तर.

(११) $2\text{क्ष}+(\text{क्ष}+2)^2=\text{क्ष}^4-1$ यांत क्षची किंमत काढ.

स्थलांतर क० $2\text{क्ष}+1+(\text{क्ष}+1)^2=\text{क्ष}^4$ यांतून

क्ष^2 $=\text{क्ष}^2$ हे वजा क०

$(\text{क्ष}+1)+(\text{क्ष}+1)^2=\text{क्ष}^4-\text{क्ष}^2$

वर्गपु॰क॰ नंतर चौपटक॰ ५(क्ष^{२}+१)+४$\sqrt{क्ष^{२}+१}$+१ = ४क्ष^{४}+४क्ष^{२}+१

वर्गमू॰का॰व स्थ॰क॰ २$\sqrt{क्ष^{२}+१}$ = २क्ष^{२}−२ ∴ $\sqrt{क्ष^{२}+१}$ = क्ष^{२}−१

वर्गक॰ क्ष^{२}+१ = क्ष^{४}−२क्ष^{२}+१ स्थ॰क॰ क्ष^{४}−३क्ष^{२} = ८

वर्गपु॰क॰ मू॰का॰ व स्थ॰क॰ क्ष = ± $\sqrt{\frac{३±\sqrt{४१}}{२}}$, $\sqrt{\frac{३+\sqrt{४१}}{२}}$ हें उ॰

(१२) (क्ष+६)^{२}+२क्ष^{२}(क्ष+६) = १३८+क्ष^{२} यांत क्षची किं॰ काढ.

वर्गपु॰क॰ (क्ष+६)^{२}+२क्ष^{२}(क्ष+६)+क्ष^{४} = १३८+क्ष+क्ष^{२}

वर्गमू॰का॰ (क्ष+६)+क्ष^{२} = ±$\sqrt{१३८+क्ष+क्ष^{२}}$

वर्गक॰ (क्ष+क्ष^{२})^{२}+१२(क्ष+क्ष^{२})+३६ = १३८+क्ष+क्ष^{२}

स्थ॰क॰ (क्ष+क्ष^{२})^{२}+११(क्ष+क्ष^{२}) = १०२

वर्गपु॰क॰ (क्ष+क्ष^{२})^{२}+११(क्ष+क्ष^{२})+$\frac{१२१}{४}$ = $\frac{५२९}{४}$

वर्गमू॰का॰ क्ष+क्ष^{२}+$\frac{११}{२}$ = ±$\frac{२३}{२}$ ∴ क्ष+क्ष^{२} = ६ किंवा −१७

वर्गपु॰क॰, मू॰का॰, स्थ॰क॰ क्ष = २ किंवा ३ हें उत्तर.

(१३) $\left\{\begin{array}{l} क्ष^{२}+य^{२}=१५ \\ क्ष^{३}+य^{३}=१३ \end{array}\right\}$ या वर्ग समीकरणांत क्ष आणि य या दोन अव्यक्त पदांचा किंमती काढ.

दुसरे समीकरणास (क्ष+य) नें गुणून, निप्पट करून,

३क्ष^{३}+३क्ष^{२}य+२क्षय^{२}+३य^{३} = ३९(क्ष+य)

म॰स॰ची दु॰वजाक॰ −२क्ष^{२} − २य^{२} = −७०

(क्ष+य)^{३} = ३९(क्ष+य)−७०} यास (क्ष+य) नें गुणून,

(क्ष+य)^{४} = ३९(क्ष+य)−७०(क्ष+य) यांत १४(क्ष+य)^{२}

दोनही बा॰ वजाक॰ व वर्गपु॰क॰, (क्ष+य)^{४}−१४(क्ष+य)^{२}+४९ = २५(क्ष+य)^{२}−७०(क्ष+य)+४९, वर्गमूळका॰ (क्ष+य)^{२}−७ = ५(क्ष+य)−७ ∴ क्ष+य = ५, क्ष = ५−य ही किं॰ दु॰ समीकरणांत ठेवून, स्थ॰क॰य

$= -१२ \therefore \text{य}^{२} - ५\text{य} = -६$ वर्ग पुरा करून, मूळ काढून, स्थ॰क॰

$\text{य} = ३, २$ $\text{क्ष} = २, ३$ हें उत्तर.

(१४) $\begin{cases} \text{क्ष}^{४} + \text{य}^{४} = १ + २\text{क्षय} + २\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} \\ \text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३} = २\text{य}^{२}\text{क्ष} + २\text{य}^{३} + \text{क्ष} + १ \end{cases}$ यांत क्ष आणि य या अव्यक्त पदांची किं॰ काढ.

प्र॰स॰ स्थ॰क॰ $\text{क्ष}^{४} - २\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२} + \text{य}^{४} = १ + २\text{क्षय}$ यांत $\text{क्ष}^{२}\text{य}^{२}$ दोनही बाजूंत मिळ॰ मूळका॰ $(\text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२}) = \pm(\text{क्षय} + १)$ यास $(\text{क्ष} + \text{य})$नें गुणून व स्थलां॰क॰ $\text{क्ष}^{३} - \text{य}^{३} = २\text{क्षय}^{२} + \text{य} + \text{क्ष}$ यांत $२\text{य}^{३} = २\text{य}^{३}$ मिळ॰

$$(\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३}) = \text{य}(२\text{य}^{२} + १) + \text{क्ष}(२\text{य}^{२} + १)$$

दु॰स॰ पासून, $(\text{क्ष}^{३} + \text{य}^{३}) = \text{क्ष}(२\text{य}^{२} + १) + (२\text{य}^{२} + १)$

$$\therefore \text{क्ष}(२\text{य}^{२} + १) + (२\text{य}^{२} + १) = \text{य}(२\text{य}^{२} + १) + \text{क्ष}(२\text{य}^{२} + १)$$

स्थलां॰क॰ नंतर $(२\text{य}^{२} + १)$ याणें भागून, $\text{य} = १$ $\text{क्ष} = २, -१$ हें उ॰

(१५) $\begin{cases} \text{क्ष}^{२} + \text{य}^{२} + \text{क्ष} + \text{य} = ९२२ \\ \sqrt{\text{क्षय}} = २० \end{cases}$ यांत क्ष आणि य या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

$\sqrt{\text{क्षय}} = २०$, $\text{क्षय} = ४००$, $२\text{क्षय} = ८००$ हें प्र॰स॰ समीकरणांत मि॰ $(\text{क्ष} + \text{य})^{२} + (\text{क्ष} + \text{य}) = १७२२$, वर्गपुराक॰ $(\text{क्ष} + \text{य})^{२} + (\text{क्ष} + \text{य}) + \frac{१}{४} = \frac{६८८९}{४}$ मू॰का॰ $\text{क्ष} + \text{य} + \frac{१}{२} = \pm \frac{८३}{२}$ } $\text{क्ष} + \text{य} = ४१$ किंवा -४२. आणि $\text{क्षय} = ४००$ ही कृति पूर्वी प्र॰क॰ $\text{क्ष} = २५$, $\text{य} = १६$ हें उत्तर.

(१६) $\begin{cases} \text{क्ष}^{२} + \text{क्षय} + \text{य}^{२} = ३७ \cdots (\text{अ}) \\ \text{क्ष}^{२} + \text{क्षज्ञ} + \text{ज्ञ}^{२} = २८ \cdots (\text{ब}) \\ \text{य}^{२} + \text{यज्ञ} + \text{ज्ञ}^{२} = १९ \cdots (\text{क}) \end{cases}$ यांत क्ष, य आणि ज्ञ या अव्यक्त पदांची किंमत काढ.

अ−ब $\cdots$ $\text{य}^{२} - \text{ज्ञ}^{२} + (\text{य} - \text{ज्ञ})\text{क्ष} = ३७ - २८ = ९$ } $\therefore \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = \frac{९}{\text{य} - \text{ज्ञ}}$ } ड

ब−क $\cdots$ $\text{क्ष}^{२} - \text{य}^{२} + (\text{क्ष} - \text{य})\text{ज्ञ} = २८ - १९ = ९$ } $\text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = \frac{९}{\text{क्ष} - \text{य}}$

∴ $य^{२}$-ज्ञ = क्ष-य अथ० य-ज्ञ = क्ष-य, क्ष+ज्ञ = २य हीकिं० इ
यांत मांडून, २य = $य^{२}$-ज्ञ, य = $य^{२}$-ज्ञ, $य^{२}$-यज्ञ = २ ∴ ज्ञ = $\frac{य^{२}-२}{य}$
$ज्ञ^{२}$ = $\frac{य^{४}-६य^{२}+९}{य^{२}}$ या किमती क यांत मांडून, $य^{२}$+$य^{२}$-३+$\frac{य^{४}-६य^{२}+९}{य^{२}}$
अथवा २$य^{२}$+$\frac{य^{४}-६य^{२}+९}{य^{२}}$ = २३. छे० सो० ३$य^{४}$-६$य^{२}$+९ = २२$य^{२}$
स्थ० क०, व गु० सो० $य^{४}$-$\frac{२८}{३}$$य^{२}$ = -२. वर्गपुराक०, मू० का०, स्थ०
क० $य^{२}$=४ ∴ य=२, ज्ञ = $\frac{य^{२}-२}{य}$ = १ आणि क्ष = २य-ज्ञ = ५-१ = ४
उत्तर, क्ष=४, य=२, ज्ञ=१

जां पासून वर्गसमीकरणें उत्पन्न होतात असे प्रश्न.

(१) त्या दोन संख्या काय आहेत कीं, जांची बेरीज १२ आणि जांचा गुणाकार ३५ होतो. क्ष आणि य या दोन संख्या घे.तर,

क्ष+य = १२ } क्ष = १२-य तेव्हां १२-य = $\frac{३५}{य}$ छे० सो० १२य-$य^{२}$ =
क्षय = ३५ } क्ष = $\frac{३५}{य}$ ३५, चिन्हें बदलक० $य^{२}$-१२य = -३५

वर्गपुराक० $य^{२}$-१२य+३६ = १ मू० का० व स्थ० क० य = ७, ५

उत्तर, क्ष = ५, ७ य = ७, ५

(२) एका मनुष्यानें ६० रुपयांस कांहीं मेंढरें विकत घेतलीं; त्यापैकीं १५ घरीं ठेवून, बाकी ५४ रुपयांस विकलीं. त्या व्यापारांत त्या सदर मेंढरास $\frac{१}{२}$ रुपया नफा झाला. तेव्हां एकंदर किती मेंढरें होतीं?

क्ष = मेंढरें, तर $\frac{६०}{क्ष}$ प्रत्येकाची किंमत.

$\frac{५४}{क्ष-१५}$ - $\frac{६०}{क्ष}$ = $\frac{१}{२}$ छे० सो० ५४०क्ष-६००क्ष+९०००=$क्ष^{२}$-१५क्ष

स्थ॰क॰ क्ष^{२}+४५क्ष=९००० वर्ग पु॰क॰ क्ष^{२}+४५क्ष+$\frac{२०२५}{४}$=$\frac{३८०२५}{४}$

मू॰का॰ क्ष+$\frac{४५}{२}$=$\frac{१९५}{२}$, स्थ॰क॰ क्ष=$\frac{१५०}{२}$=७५ मेंढरें हें उत्तर.

(२) एका काटकोन चौकोन आकृतीचा बाजू ८:५ या प्रमाणांत आहेत आणि त्या आकृतीचें क्षेत्रफळ २५६० आहे. तेव्हां त्याची प्रत्येक बाजू काय?

८क्ष मोठी बाजू, ५क्ष ल॰बा॰ ४०क्ष^{२}=२५६०, क्ष^{२}=६४, क्ष=८ तेव्हां

८क्ष=६४, ५क्ष=४० उत्तर, मो॰बा॰ ६४ ल॰बा॰ ४०

(४) कोणी एकानें एक वस्तु थान २४ रुपयांस विकलें. त्यांत त्याला मूळ किमती इतका दर शेंकडा तोटा झाला. तेव्हां मूळ किंमत काय?

क्ष मूळ किंमत. क्ष−२४ तोटा, तर क्ष: क्ष−२४ :: १०० : क्ष

क्ष^{२}=१००क्ष−२४०० स्थ॰क॰ क्ष^{२}−१००क्ष=−२४०० वर्ग पु॰क॰ क्ष^{२}−

१००क्ष+२५००=१०० मू॰का॰ स्थ॰क॰ क्ष=६० किंवा ४० रु॰ मू॰ किं॰

(५) गणित प्रमाणांत तीन संख्या काढ. अशा कीं, लहान संख्येचा वर्ग दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां, १६ आणि मोठ्ये संख्येचा वर्ग लहान दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां, २८ होतात. तर त्या तीन संख्या कोणत्या?

क्ष−य प्र॰सं॰ क्ष दु॰सं॰ क्ष+य ति॰सं॰ यांत उत्तर=य

तर २क्ष^{२}−क्षय+य^{२}=१६ ....अ } ब−अ .... २क्षय=१२, क्षय=६

२क्ष^{२}+क्षय+य^{२}=२८ .... ब } ∴ क्ष=$\frac{६}{य}$ हें कि॰ दु॰ समीकरणांत रि॰ समीक॰ सोड॰ य=२, क्ष=३ ∴ १,३,५ ग॰सं॰ हें उत्तर.

(६) दोन संख्या काढ. अशा कीं, जांची बेरीज ११ आणि वर्गांचा गुणाकार ७८४ होतो.

क्ष आणि य या संख्या घे तर, क्ष+य=११, $क्ष^{२}य^{२}=७८४$

प्र॰ स॰ वर्ग क॰ त्यांत दु॰ समी॰ वर्गमूळाची चौपट वजा क॰ $क्ष^{२}-२क्षय+य^{२}=९$, वर्गमू॰ का॰ क्ष−य=३, क्ष+य=११ ∴ क्ष=७। ४ य=४, ७ संख्या.

(७) दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी १५ आणि त्या संख्यांस परस्परांनीं भागिलेल्या भागाकारांची बेरीज $\frac{३४}{१५}$ आहे. तेव्हां त्या दोन संख्या कोणत्या?

$क्ष^{२}-य^{२}=१५$ } $क्ष=\sqrt{१५+य^{२}}$ ही किं॰ दु॰

$\frac{क्ष}{य}+\frac{य}{क्ष}=\frac{३४}{१५}$ छे॰ सो॰ $क्ष^{२}+य^{२}=\frac{३४}{१५}क्षय$ } समीकरणांत लिहून,

$१५+२य^{२}=\frac{३४}{१५}य\sqrt{१५+य^{२}}$ वर्ग कि॰, छे॰ सो॰, स्थ॰ क॰, वर्ग पु॰ क॰,

मू॰ का॰ य=१ क्ष=४ उत्तर, १ आणि ४ सं॰

(८) ती संख्या काय आहे, जिला दोन मूळ अंकांचे गुणाकारानें भागिलें असतां भागाकार २ येतो आणि तींत २७ मिळविले असतां मुळक्रम स्थिती होते.

१०क्ष+य मूळ संख्या तर, $\frac{१०क्ष+य}{क्षय}=२$, १०क्ष+य+२७=१०य+क्ष

दु॰ स॰ स्थ॰ क॰ व ९नीं भा॰ य=क्ष+३ ही किं॰ प्र॰ समीकरणांत लि॰

१०क्ष+क्ष+३ = २क्ष(क्ष+३) अथवा $११क्ष+३=२क्ष^{२}+६क्ष$

स्थ॰ क॰ $२क्ष^{२}-५क्ष=३$ पु॰ सो॰ व वर्ग पु॰ क॰ $क्ष^{२}-\frac{५}{२}क्ष+\frac{२५}{१६}=\frac{४९}{१६}$

मू॰ का॰ $क्ष-\frac{५}{४}=\frac{७}{४}$ ∴ क्ष=३, य=६ याजकरितां १०क्ष+य=३६ मूळ संख्या हें उत्तर.

(९) त्या तीन संख्या काय आहेत कीं, प्रथम व दुसरी आणि दुसरी व तिसरी यांचा वजाबाक्यांची वजाबाकी २ तसें ज्यांची बेरीज १७ आणि वर्गांची बेरीज १२९

उत्तर, २,५,१०

(१०) एके पलटणीचीं कांहीं माणसें पोकळ चौरसाकृति उभीं केलीं त्यांत तीन तीन रांगा होत्या; नंतर त्या माणसांत २५ माणसें दुसरीं मिळवून त्यांची एक भरींव चौरसाकृति केली, ज्या चौरसाची एक बाजू पोकळ चौरसाचे बाजूचे वर्गमुळाहून २२ नीं अधिक; तेव्हां त्या पलटणींत प्रथम माणसें किती होतीं? उत्तर, १३६ माणसें.

घनादि समीकरण.

घनादि समीकरण पृथक्करणाच्या सामान्य रीति बहुत आहेत; परंतु त्यांतून सुलभ आणि थोडक्यांत करणाच्या रीति सांगतों.

प्रथमरीति.

गणिताच्या तपशील करून दोन संख्या काढाव्या, ज्या मूळाचे जवळ जवळ येतील. नंतर त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्तपदस्थ कीं ठेवून, त्याचे त्याचे चिन्हांशीं एकत्र कराव्या. नंतर समीकरणाची सांगितलेली किंमत व्यक्तपद, तें याहून कमी किंवा जास्त असेल, त्या प्रमाणें दोन वजा बाक्या काढाव्या. व्यक्तपद अधिक असल्यास वजाबाकीस उणें चिन्ह आणि कमी असल्यास अधिक चिन्ह करावें.

वर प्रमाणें काढलेले दोन संख्यांची वजाबाकी दोन अंतरांतून एकानें गुणावी; गुणाकार येईल तो, जर दोन अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत तर, वजाबाकीनें आणि विरूप आहेत तर, मिळवणीनें भागावा. अथवा या रीतीनें त्रैराशिक करावें. जशी दोन अंतरांची वजाबाकी अथवा बेरीज : कोणतेही अंतरास: तशी त्या दोन संख्यांची वजाबा

की; त्या घेतले अंतराचे संख्येचे शतांश.

वरकामांत घेतलेलें अंतर जर उणें आहे, तर हें इच्छाफळ त्या अंतराचे संख्येंत मिळवावें आणि अधिक आहे तर वजा करावें; ह्मणजे इच्छिले मूळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल.

हें मूळ आणि पूर्व मूळाचे जवळ जवळ दोन संख्या काढल्या आहेत, त्यांतून एक अथवा दुसरी कोणतीही संख्या जी मूळाचे जवळ जवळ आहे, ती घेऊन पूर्वी प्रमाणें पुनः करावें; ह्मणजे पूर्वींपेक्षां अधिक जवळ दुसरें मूळ निघेल. या प्रमाणें पुनःपुन्हा करीत जावें; ह्मणजे अतिच मूळाजवळ संख्या निघत जाईल.

प्रथमटीप. दोन संख्या घेणें त्या अशा घ्याव्या कीं, त्यांची वजावाकी एक राहील आणि पृथक्करण करते समयीं लहान अंतर कामांत घ्यावें.

दुसरीटीप. गणिताचा तपशील करते समयीं मूळांक तपासावे. दोन संख्या घेणें त्या एक किंमतीहून उणी आणि एक किंमतीहून अधिक अशा घ्याव्या.

उदाहरणें.

(१) $क्ष^३+क्ष^२+क्ष=१२५$ या घन समीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काढ.

क्ष ची किंमत ४ आणि ५ यांचे मध्यें आहे याजकरितां,

प्र॰ सं॰	अव्यक्त	दु॰ सं॰
४....	क्ष	५

पुनः ४·७ आणि ४·८ हीं खरीं मूळें आणून,

प्र॰ सं॰	अव्यक्त	दु॰ सं॰
४·७....	क्ष	४·८

१६ ······ क्ष^2 ···· २५		२२·०९ ···· क्ष^2 ···· २२·०४
६४ ······ क्ष^3 ···· १२५		१०३·८२३ ···· क्ष^3 ···· १०८·२८८
८४ ···· बेरीज ···· १५५		१३०·६१३ ···· बेरीज ···· १३६·१२८
१२५ ·· सांगि· किंमत ·· १२५		१२५ ··· सां· किंम· ·· १२५
−५१ ···· अंतरें ···· +२०		−५·३८७ अंतरें +१·१२८

७१ ही दोन अंतरांची बेरीज असें, ७१ : १ :: ५१ : ·७ हें ४ यांत मिळवून, क्ष= ४·७ हें जवळ जवळ आहे.

५·५१५ ही दोन अंतरांची बे· असें, ५·५१५ : ·१ :: १·१२८ : ·०२०४ हें ४·८ यांतून वजा करून क्ष= ४·७७९६ हें जवळ जवळ आहे.

पुनः ४·७७९ आणि ४·७८० या दोन संख्या घेऊन, पृथ· याप्रमाणें होतें.

प्र·सं·	अव्यक्त	दु·सं·
४·७७९	क्ष	४·७८०
२२·८३८	क्ष^2	२२·८४८
१०९·१४७	क्ष^3	१०९·२१५
१३१·९८५	बेरीज	१३२·०६३
१२५	सांगि·कि·	१२५
+१·७६४	अंतरें	+१·८४२

·०७९ ही दोन अंतरांची वजा· ·०७९ : ·००१ :: १·७६४ : ·०२२३ हें ४·७७९ यासंतून वजा करून ४·७५६८ = क्ष हें जवळ जवळ आहे.

(२) क्ष^3−३क्ष^2+२१क्ष= ८३४ या समीकरणांत क्ष अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

क्षची किंमत ३·९ आणि ४ यांचे मध्यें आहे. तर,

प्र·सं·	अव्यक्त	दु·सं·
३·१	क्ष	४
९·६१	२ क्ष	५
−१०७·५५७	−क्षे	−११२
१०२·२४२	क्षे	१०२५
७२८·२३८	बेरीज	९२६
९२५	सांगि·सं·	९२५
−१०५·७६६	अंतरें	+२

दोन अंतरांची बेरीज १०७·७६६ असें, १०७·७६६ : १ :: १०५·७६६ : ·०९८१ हें ३·१ यांत मिळवून, ३·१९८१ जवळ जवळ आहे हें उत्तर.

तिसरी टीप. यासमयीं पूर्वीं सांगितले रीतीचें स्मरण करावें, प्रति समीकरणास तितकीं मूळें आहेतकीं, त्यांत जितक्या घातपरंपरा येतात, अथवा समीकरणांत अव्यक्त पदाचा सर्वांहून मोठा घात मकाचाक जितके किमतीचा आहे, ह्मणजे एक वर्ण समीकरणांत अव्यक्त पदास मूळ किंवा किंमत एक आहे, वर्गसमीकरणांत २, घनसमीकरणांत ३ इत्यादि.

जेव्हां कोणतेही समीकरणाचें मूळ संनिध रीतीनें निघालें, तेव्हां राहिलीं मूळें पुढें सांगितल्या रीतीनें काढतां येतील.

समीकरणांत व्यक्त पदास स्थलांतर करावें आणि संनिधरीतीनें काढलेलें मूळ अव्यक्त पदांत वजा करून त्याणें त्यास भागावें, ह्मणजे एक घात कमी दुसरें एक समीकरण उत्पन्न होईल. या नवे समीकरणाचें मूळ संनिधरीतीनें काढावें, ह्मणजे समीकरणाचें दुसरें मूळ निघेल; नंतर या दुसरे मूळानें पूर्वीप्रमाणें दुसरे समीकरणाहून एक घात कमी असें तिसरें समीकरण करावें

असें वर्गसमीकरणहोई पर्यंत करावें. वर्गसमीकरण झाल्यानंतर त्यांचा किमती वर्गसमीकरणाच्या रीतीनें दोन निघतील. या प्रमा णें सर्व मूळें निघतील.

(३) क्ष³−१५क्ष²+६२क्ष=५० यांत क्ष=१.०२८०४ हें एक मूळ काढिलें आहे. तर क्ष−१.०२८०४ हा भाजक.

क्ष−१.०२८०४) क्ष³−१५क्ष²+६२क्ष−५० (क्ष²−१३.९७१९६क्ष+४८.६३६२७ =० हें दुसरें नवें समीकरण उत्पन्न झालें. याचें वर्गसमीकरणरीती नें पृथक्करण करून दोन किमती निघतात.

उत्तर, १.०२८०४ प्र०मूळ, ६.५५६९२ दु०, ७.४१५०४ ति०

चवथी टीप. यावरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे कीं, इतर रीती नीं पृथक्करण करून किंमत काढायास त्या समीकरणास एकरूप द्यावें लागतें, तसें या रीतींत नाहीं. ही रीति समीकरणाचें जें रूप आ हे, त्याजवरच लागते. समीकरणांत कशींही करणीपदें किंवा संयु क्त पदें असोत.

(४) √५क्ष³−१२क्ष+√क्ष=२० या समीकरणांत क्षची किं० काय?

उत्तर, २

दुसरीरीति.

कोणत्याही समीकरणाचें मूळ जवळजवळ काढावयाची रीति.

समीकरणांत जा किमती मांडिल्या असतां, इष्ट संख्येपेक्षां एक वेळ कमी आणि एक वेळ अधिक फल येईल, अशा दोन संख्या शोधू न काढाव्या. म्हणजे खरी किंमत त्या दोहोंचा मध्यें आहे, असा नि श्चय होतो. नंतर यांतून एक किंमत आणि खरी किंमत यांचें अं

तर व आहे असें मानून, तें घन ऋण करून तीस जोडावें आणि तें प द अव्यक्त पदस्थळीं ठेवून, त्याचे वर्गापासून पुढील घात लहान अ पूर्णांक होतात, ह्मणून ते सर्व सोडून द्यावें; ह्मणजे एकवर्ण समीक रणाच्या रीतीनें व ची किंमत निघेल, ती कल्पित संख्येस जोडली ह्मणजे खरी किंमत होईल.

उदाहरण.

क्ष^{३}−४क्ष−११५=० या समीकरणांत अव्यक्त पदाची किंमत काय आहे?

यांत क्ष=५ केल्यास −१० येतात, आणि ५·२ केल्यास +४·८०८ येतात. ह्मणून क्ष=५+व, क्ष^{३}=१२५+७५व+१५व^{२}+व^{३}

आणि −४क्ष=−२०−४व

−११५=−११५

क्ष^{३}−४क्ष−११५=−१०+७१व+१५व^{२}+व^{३} ∴ ०= −१०+७१व+१५व^{२}+व^{३} आतां ७१व=१० ∴ व=$\frac{१०}{७१}$=·१४ ∴ क्ष=५·१४

पुनः क्ष=५·१४+व, क्ष^{३}=१३५·७९६७४४+७९·२५८८व+१५·४२व^{२}+व^{३} −४क्ष=−२०·५६−४व आणि −११५=−११५

क्ष^{३}−४क्ष−११५=·२३६७४४+७५·२५८८व+१५·४२व^{२} +व^{३}, ७५·२५८८व=−·२३६७४४, व=−·००३०९

क्ष=५·१३६९१ हें उत्तर जवळ जवळ आलें.

व्याज.

कोणतेही मुद्दलाचें कितीही मुदतीचें व्याज, मुद्दल आणि मु

दती यांशीं प्रमाणांत असतें. याजकरितां,

सरळव्याज.

प= मुद्दलकर्ज.

अ= व्याजमुद्दलरास.

त= मुदती.

र= एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज.

ह्मणून,

अ= प+परत व्याजमुद्दल.

$प = \frac{अ}{१+रत}$ मुद्दल.

$त = \frac{अ-प}{पर}$ मुदती.

$र = \frac{अ-प}{पत}$ व्याजाचा दर.

मुद्दल दुप्पट होण्यास.

$त = \frac{२प-प}{पर} = \frac{१}{र}$

चक्रवाढव्याज

प= मुद्दल कर्ज.

अ= व्याज मुद्दलरास.

त= मुदती.

र= एकरु॰ एकवर्षाचें व्याज.

च= एकरु॰ एक मुदतीची रास.

१रु॰ः पःः चः पच एके मुदतीची रास.

१ः पचःः चः $पच^२$ दोन मु॰ रास.

१ः $पच^२$ःः चः $पच^३$ तीन मु॰ रास.

१ः $पच^{त-१}$ःः चः $पच^त$ त मुद॰ रास

ह्मणून,

$अ = पच^त$ $प = \frac{अ}{च^त}$

$त = \frac{ला॰\left(\frac{अ}{प}\right)}{ला॰च}$ $च = \sqrt[त]{\frac{अ}{प}}$

मुद्दल दुप्पट होण्यास

$\frac{ला॰२प - ला॰प}{ला॰च} = \frac{ला॰२}{ला॰च}$

उदाहरणें.

(१) दरसाल दरशेकडा ५ रुपये प्रमाणें १२५ रुपये मुद्दलाचें २ वर्षें ३ महिन्याचें सरळव्याज काय होईल?

आतां प=१२५, $र = \frac{१}{२०}$, $त = २\frac{१}{४}$ तेव्हां अ= प+परत = $१२५ + १२५ \times \frac{१}{२०} \times \frac{९}{४} = १३९\frac{१}{१६}$ रु॰ रास − १२५ = $१४\frac{१}{१६}$ रु॰ व्या॰ होतें.

(२) दरसाल दरशेकडा ५ रु॰ प्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें कांहीं रुपये ५ वर्षे होते, त्यांची रास ६३८ रु॰ ५६ $\frac{५}{१६}$ रे॰ आली; तेव्हां मुद्दल किती होतें ?

अ = ६३८ रु॰ ५६ $\frac{५}{१६}$ रे॰ = $\frac{४०८४१०१}{६४००}$, च = $\frac{२१}{२०}$

प = $\frac{अ}{च^न}$ = $\frac{४०८४१०१}{६४००} \div \left(\frac{२१}{२०}\right)^५$ = ५०० रुपये मुद्दल हें उत्तर.

प्राप्ति.

नेमले मुदतीस जो पैक्याचा लाभ होतो त्यास प्राप्ति ह्मणावें. जसें घर, भूमि इत्यादिकाचें भाडें, कर्जाचें व्याज, वर्षासन इत्यादि. बहुतकरून हे लाभ वर्षाचे मुदतीवर असतात.

प्राप्तीचे दोन प्रकार आहेत. प्रथम प्रकार, पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती वर्तमान प्राप्ति; दुसरा प्रकार, कांहीं मुदतीनें पैका हातीं खचित् येत जाईल ती भविष्य प्राप्ति.

व्याख्या.

१ जर प्राप्ति किती एक वर्षे बंद राहिली तर, तिला अवरुद्ध ह्मणावें.

२ प्राप्तीस जर कांहीं मुदतीची मर्यादा आहे तर, तिला सावधि प्राप्ति ह्मणावें.

३ जी प्राप्ति निरंतर चालणारी तिला निरवधि प्राप्ति ह्मणावें.

४ प्राप्तीचें व्याजमुद्दल ह्मणजे अवरुद्ध प्राप्तीचें तितके वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल मिळून.

५ प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका देण्या घेण्यास यो

ग्य होतो, त्यास प्रासीची वर्तमान किंमत ह्मणावें.

अ= प्राप्ति.

न= प्रासीची वर्षसंख्या.

च= एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याज मुद्दल.

म=प्रासीचें व्याज मुद्दल.

व= प्रासीची वर्तमान किंमत.

ल= प वर्षांनंतर कांहीं वर्षें पर्यंत चालणारे प्रासीची वर्तमान किंमत.

च राशीची एकवर्षाची वर्तमान किंमत १ आहे. याजकरितां,

$च : अ :: १ : \frac{अ}{च}$ एकवर्षाची वर्तमान किंमत आज.

$च : \frac{अ}{च} :: १ : \frac{अ}{च^{२}}$ दोन वर्षांची वर्तमान किंमत आज.

$च : \frac{अ}{च^{२}} :: १ : \frac{अ}{च^{३}}$ तीन वर्षांची वर्तमान किंमत आज.

या प्रमाणें न वर्षांपर्यंतची एकंदर वर्तमान किंमत. $व = \frac{अ}{च} + \frac{अ}{च^{२}} + \frac{अ}{च^{३}} + \frac{अ}{च^{४}} + इ० \frac{अ}{च^{न}} = अ\left(\frac{१}{च} + \frac{१}{च^{२}} + \frac{१}{च^{३}} + \frac{१}{च^{४}} + इ० \frac{१}{च^{न}}\right) = \left(\frac{च^{न}-१}{च-१}\right)\frac{अ}{च^{न}}$

जेव्हां प्रासि निरवधी आहे, तेव्हां न गळ अनंत. याजकरितां $च^{न}$ हाही अनंत, ह्मणून $\frac{१}{च^{न}} = ०$ होऊन वरील समीकरणास हें रूप होतें.

$व = \frac{अ}{च-१}$ ह्मणजे प्रासीस एक रुपयाचे एकवर्षाचे व्याजानें भागावें. भागाकार येईल ती निरवधी प्रासीची वर्तमान किंमत होय.

पुनः एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल च, दोन वर्षांचें $च^{२}$, तीन वर्षांचें $च^{३}$, आणि न वर्षांचें $च^{न}$ याजकरितां, $च + च^{२} + च^{३} + इ० च^{न-१} + च^{न} = \frac{च^{न}-१}{च-१}$ हें एकरुपयाचें न वर्षांचें व्याज मुद्दल आहे, तेव्हां अ प्रासीचें या प्रमाणें होतें.

$म = \left(\frac{च^{न}-१}{च-१}\right)अ = वच^{न}$, $व = \left(\frac{च^{न}-१}{च-१}\right)\frac{अ}{च^{न}} = \frac{म}{च^{न}}$ वर सिद्ध केल्या प्रमाणें.

$अ = \left(\frac{च-१}{च^{न}-१}\right)म = \left(\frac{च-१}{च^{न}-१}\right)वच^{न}$

$$न=\frac{ला॰म-ला॰व}{ला॰च}=\frac{ला॰\left(\frac{मच-म+अ}{अ}\right)}{ला॰च},$$

$$ला॰च=\frac{लाम-ला॰व}{न}$$

$$रु=\left(\frac{च^{न}-१}{च-१}\right)अ-\left(\frac{च^{र}-१}{च-१}\right)अ=(च^{न}-च^{र})\frac{अ}{च-१}$$

उदाहरणें.

(१) ४०० रु॰ दरवर्षाची प्राप्ति ५ वर्षें पर्यंत अवरुद्ध राहिली. तिचें दरसाल दर शेंकडा ४ रु॰ चक्रवाढ व्याजाचे दरानें व्याज मुद्दल काय होईल?

$\frac{(१.०४)^{५}-१}{.०४}\times ४०० =$ रु॰ २१६६ .. आ॰ ८ .. पै॰ ५.५५२८ रास हें उत्तर.

(२) दरसाल ३०० रु॰ प्राप्ति आज पासून १० वर्षें पर्यंत चालणार. तिची दरसाल दर शेंकडा २½ रु॰ चक्रवाढ व्याजाचे दरानें वर्तमान किंमत काय होईल?

$\frac{(१.०२५)^{१०}-१}{.०२५}\times\frac{३००}{(१.०२५)^{१०}} =$ रु॰ २५२४ .. आ॰ १५ .. पै॰ ८.१६ वर्त॰ किं॰

(३) दरसाल दर शेंकडा ३ रु॰ चक्रवाढ व्याजाचे दरानें पांच वर्षांनीं व्याज मुद्दल रकम ४०० रु॰ आणून दिले. तेव्हां प्राप्ति काय होती?

$\frac{.०३}{(१.०३)^{५}-१}\times ४०० =$ रु॰ ७५ .. आ॰ ५ .. पै॰ १.१४१२ प्राप्ति हें उत्तर.

अनंत श्रेणी.

ही अनंत श्रेणी जांत संयुक्त पद भाजक आहे अशा भागाकारापासून अथवा संयुक्त करणी पदाचें मूळ काढिल्यापासून किंवा दुसरे कांहीं सामान्य रीतीनें उत्पन्न होते. ही कितीही वाढविली तरी अंत पावत नाहीं. जसें अंक गणितांत आवर्त दशांश*.

* ही अनंत श्रेणी डाक्टर वालिस साहेब यांणीं $\frac{अ}{१-र}$ हें अपूर्ण बीज चालते भागाकारानें भागिल्यापासून प्रगट केली.

कितीएक पदें उत्पन्न केल्या नंतर श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल. नंतर त्याचा आधारानें तपशिलाचा श्रम केल्यावांचून श्रेणी पुढें चालवावी.

भागपहिला.

प्रथमकृत्य.

अपूर्ण पदास भागाकारानें अनंत श्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

रीति. भागाकार रीतीनें अंश, छेदांनीं भागावे आणि हें भागाकार कृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें; म्हणजे इच्छिलें रूप होईल.

उदाहरणें.

(१) $\frac{१}{१+अ}$ यास अनंत श्रेणीचें रूप दे.

१+अ) १ ($१-अ+अ^2-अ^3+अ^4-अ^5+-$ इ. हें उत्तर.

$१ \pm अ$

$* - अ$

$\mp अ \mp अ^2$

$* \quad अ^2$

$अ^2 \pm अ^3$

$* . - अ^3$

(२) $\frac{अ}{अ+क्ष}$ यास अनंत श्रेणीचें रूप दे.

उत्तर, $१-\frac{क्ष}{अ}+\frac{क्ष^2}{अ^2}-\frac{क्ष^3}{अ^3}+\frac{क्ष^4}{अ^4}+-$ इ.

दुसरें कृत्य.

संयुक्तकरणी पदास अनंत श्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

रीति. गणित रीतीनें त्याचें मूळ काढावें आणि हें मूळकृत्य इच्छा आहे पर्यंत वाढवावें. या रीतीनें वर्गमूळ मात्र श्रमावांचून निघेल.

उदाहरणें.

(१) $अ^2-व^2$ याचें अनंत श्रेणींत मूळ काढ.

$$अ^{२}-ब^{२}\left(अ-\frac{ब^{२}}{२अ}-\frac{ब^{४}}{८अ^{३}}-\frac{ब^{६}}{१६अ^{५}}-\frac{५ब^{८}}{१२८अ^{७}}\ इ.\right.$$

$$\frac{-अ^{२}}{}$$

$$२अ-\frac{ब^{२}}{२अ}\Big)\ -ब^{२}$$

$$\frac{-ब^{२}\pm\frac{ब^{४}}{४अ^{२}}}{}$$

$$२अ-\frac{ब^{२}}{अ}-\frac{ब^{४}}{८अ^{३}}\Big)-\frac{ब^{४}}{४अ^{२}}$$

$$\frac{\mp\frac{ब^{४}}{४अ^{२}}\pm\frac{ब^{६}}{८अ^{४}}\pm\frac{ब^{८}}{६४अ^{६}}}{}$$

$$२अ-\frac{ब^{२}}{अ}-\frac{ब^{४}}{४अ^{३}}-\frac{ब^{६}}{१६अ^{५}}\Big)-\frac{ब^{६}}{८अ^{४}}-\frac{ब^{८}}{६४अ^{६}}$$

$$\frac{\mp\frac{ब^{६}}{८अ^{४}}\pm\frac{ब^{८}}{१६अ^{६}}\pm\frac{ब^{१०}}{६४अ^{८}}\mp\frac{ब^{१२}}{२५६अ^{१०}}}{}$$

$$-\frac{५ब^{८}}{६४अ^{६}}$$

(२) $\sqrt{१+१}=\sqrt{२}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+\frac{५}{१२८}$ इ.

(३) $\sqrt{अ^{२}+२अब-ब^{२}}$ यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

तिसरें कृत्य.

कोणतेही द्वियुक्पदाचें वर्गमूळ काढावयाचें अथवा द्वियुक् पद करणीस अनंत श्रेणीचें रूप द्यावयाचें.

रीति. हें कृत्य पुढील सारणीकोष्टका पासून उत्पन्न होतें. असें कीं, यांतील अक्षरांचे स्थानीं द्वियुक्‌ पदाचीं अक्षरें ठेविल्यानें. म्हणजे, $(अ+क्ष)^{\frac{म}{न}}=अ^{\frac{म}{न}}+\frac{म}{न}\cdot अ^{\frac{म-न}{न}}क्ष+\frac{म}{न}\times\frac{म-न}{२न}\cdot अ^{\frac{म-२न}{न}}क्ष^{२}+\frac{म}{न}\times\frac{म-न}{२न}\times\frac{म-२न}{३न}\cdot अ^{\frac{म-३न}{न}}क्ष^{३}+$ इ.

यांत अ= प्रथम पद, क्ष= दुसरें पद, $\frac{म}{न}$ = घात किंवा मूळ प्रकाशक.

एथें करणीचे सातवे प्रकारांत सांगितल्याप्रमाणें कोणतेही अ

पूर्ण बीजाचे छेद अंश स्थळीं आणि अंश छेद स्थळीं पका शाक चि न्ह बदल करून आणिले पाहिजेत.

ही रीति आणि बीज वर्गघनादि करावयाची न्यूटनची रीति हीएक च आहे.

उदाहरणें.

(१) $अ^२ + ब^२$ याचें वर्गमूळ अनंत श्रेणींत काढ.

$(अ^२+ब^२)^{\frac{१}{२}} = (अ^२)^{\frac{१}{२}} + \frac{१}{२}(अ^२)^{-\frac{१}{२}} ब^२ + \frac{१}{२}\cdot -\frac{१}{२}(अ^२)^{-\frac{३}{२}} ब^४ + \frac{१}{२}\cdot -\frac{१}{२}\cdot -\frac{३}{२}$

$(अ^२)^{-\frac{५}{२}} ब^६ + इ.$

$(अ^२+ब^२)^{\frac{१}{२}} = अ + \frac{ब^२}{२अ} - \frac{ब^४}{८अ^३} + \frac{ब^६}{१६अ^५} - \frac{५ब^८}{१२८अ^७} + - इ.$ हें उत्तर.

(२) $\frac{१}{(अ-क्ष)^२}$ याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

$\frac{१}{(अ-क्ष)^२} = (अ-क्ष)^{-२} = अ^{-२} - २अ^{-३}क्ष + (-२)\cdot(\frac{-३}{२})अ^{-४}क्ष^२ + (-२)$

$\cdot(\frac{-३}{२})\cdot(\frac{-४}{३})अ^{-५}क्ष^३ +$ इत्यादि.

$(अ-क्ष)^{-२} = \frac{१}{अ^२} - \frac{२क्ष}{अ^३} + \frac{३क्ष^२}{अ^४} - \frac{४क्ष^३}{अ^५} + - इ.$ हें उत्तर.

भाग दुसरा.

प्रथमकृत्य.

अ, ब, क, ड, ई, फ इत्यादि कोणत्याही न पदांचा श्रेणींत मागील पद पुढील पदांत वजा करून अंतरें घेतलीं, आणि त्या अंतरांचींपुनः पुन्हा अंतरें घेतलीं तर त्या पासून वेगळाले प्रकार खालीं लिहिल्या प्रमाणें सिद्ध होतात.

मूळ श्रेणी, अ , ब , क , ड , ई , फ इत्यादि.

प्रथ० अंतरपरंपरा, ब−अ, क−ब, ड−क, ई−ड, फ−ई इत्यादि.

२री अं० प० क−२ब+अ, ड−२क+ब, ई−२ड+क, फ−२ई+ड इ.

३री अं॰प॰ ड−३क+३ब−अ, ई−३ड+३क−ब, फ−३ई+३ड−क इ॰

४थी अं॰प॰ ई−४ड+६क−४ब+अ, फ−४ई+६ड−४क+ब इ॰

५वी अं॰प॰ फ−५ई+१०ड−१०क+५ब−अ इ॰

याप्रमाणें न व्या अं॰ परंपरेचीं पदें २०वे व्याख्ये प्र॰ उलटीं मांडून,

न वी अं॰प॰ ± अ ∓ नब ± न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·क ∓ न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·ड ± न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·$\frac{\text{न}-३}{४}$·ई ∓ इत्यादि ....(१)

यांत न विषम असल्यास खालचें चिन्ह आणि सम असल्यास वरचें चिन्ह धरावें.

परंपरांचीं प्रथम पदें दाखवायास, प, प', प'', प''' इ॰ पदें घेतलीं तर,

	[illegible]	
प=ब−अ		१लें पद, अ=अ
प'=क−२ब+अ		२रें, ब=अ+प
प''=ड−३क+३ब−अ		३रें, क=अ+२प+प'
प'''=ई−४ड+६क−४ब+अ		४थें, ड=अ+३प+३प'+प''

याप्रमाणें पहातां नवेंपद = अ + (न−१)प + (न−१)·$\left(\frac{\text{न}-२}{२}\right)$प' + (न−१)·$\left(\frac{\text{न}-२}{२}\right)$·$\left(\frac{\text{न}-३}{३}\right)$प'' + (न−१)·$\left(\frac{\text{न}-२}{२}\right)$·$\left(\frac{\text{न}-३}{३}\right)$·$\left(\frac{\text{न}-४}{४}\right)$प''' + इ॰ ..(२)

या समीकरणापासून कोणतेही श्रेणीचें कोणतेंही पद निघतें.

वरील समीकरणांची बेरीज घेऊन, अ+ब+क+ड+ई+फ = ६अ+१५प+२०प'+१५प''+६प'''+प'''' आहे. याजकरितां, अ+ब+क+इ॰ न पदांपर्यंतची बेरीज नअ+न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·प+न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·प'+न·$\frac{\text{न}-१}{२}$·$\frac{\text{न}-२}{३}$·$\frac{\text{न}-३}{४}$·प''+इ॰ ....(३)

या समीकरणापासून कोणतेही श्रेढीचें न पदांपर्यंत सर्व धन होतें.

श्रेणीचीं पदें एकाचे अंतरानें असल्यास दुसरे समीकरणापासून

मध्यस्थापनाचे योगानें कोणतेंही आंतील पद निघतें. यांत न प्रथम पदापासून सांगितलें पदांपर्यंत अंतर दाखवितो. याजकरितां कोणतेंही मधील पद य = अ + न·प + न·$\frac{न-१}{२}$·प' + न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·प'' + इ. ....(४)

प्रथम समीकरणांतील पदांस स्थलांतर करून, कोणते ही श्रेणीचें मधील पद निघतें. जसें, ± न·$\frac{न-१}{२}$·क = ∓ अ ± नब ± न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·ड ∓ न·$\frac{न-१}{२}$·$\frac{न-२}{३}$·$\frac{न-३}{४}$·ई ± इत्यादि ....(५)

उदाहरणें.

(१) १,४,८,१३,१९ इ. आणि १,४,८,१६,३२,६४ इ. या दोन श्रेण्यांचे यआयाक्यांचा वेगळाल्या परंपरा काढ.

१, ४, ८, १३, १९ इ.	मूळ श्रेणी	१, ४, ८, १६, ३२, ६४ इ.
३, ४, ५, ६ इ.	प्र. अं. प.	२, ४, ८, १६, ३२ इ.
१, १, १ इ.	दु. अं. प.	१, ४, ८, १६ इ.
०, ० इ.	ति. अं. प.	१, ४, ८ इ.
	च. अं. प.	१, ४ इ.
	पां. अं. प.	१ इ.

(२) १, ८, २७, ६४, १२५ इ. या श्रेणीची चवथी अं. परंपरा काढ.

म. समी. प्रमाणें च. अं. प. = १ − ४·८ + ४·$\frac{३}{२}$·२७ − ४·$\frac{३}{२}$·$\frac{२}{३}$·६४ + ४·$\frac{३}{२}$ × $\frac{२}{३}$·$\frac{१}{४}$·१२५ − + इ. = १, −३२, १६२, −२५६, १२५ = ० इं उ.

(३) २, ६, १२, २०, ३० इ. या श्रेणीचें १०वें पद काढ.

२, ६, १२, २०, ३०	इ. मू. श्रे.	
४, ६, ८, १०	इ. प्र. अं. प.	यांत प = ४
२, २, २,	इ. दु. अं. प.	प' = २
०, ०	इ. ति. अं. प.	प'' = ०

दु॰समी॰प्र॰ यांत (न−१)=९, २+९·५+९·४·२=१२०, १०वेंपद उ॰

(४) १,४,८,१३,१९ इ॰ श्रेणीचें २५पदांपर्यंत सर्वधन काय आहे?

तिसरे समी॰प्र॰ १,४,८,१३,१९ इ॰ मू॰ श्रे॰

३,४,५,६ इ॰ प्र॰ अं॰ प॰	यांत प= ३
१,१,१ इ॰ दु॰ अं॰ प॰	प'= १
०,० इ॰ ति॰ अं॰ प॰	प''= ०
	न=२५

$२५·१+२५·\frac{२५−१}{२}·३+२५·\frac{२५−१}{२}·\frac{२५−२}{३}·१=३२२५$ सर्व॰ हें उ॰

(५) ३°·४', ३°·५', ३°·६', ३°·७' इ॰ यांचा लाग्रतंमीक भुजज्या सांगितल्या आहेत· यापासून ३°·६'·१५'' याचीलाग्र॰ भुजज्या काढ·

चवथे समीकरणाप्र॰ यांत न= (३°·६'·१५''−३°·४')=२'·१५''=$\frac{९}{४}$

८·७२८३३६५, ८·७३०६८८१, ८·७३३०२७२, ८·७३५३५३५ इ॰ मू॰ श्रे॰

·००२३५१६ , ·००२३३९१ , ·००२३२६३ इ॰ प्र॰ प॰

−·००००१२५ , −·००००१२८ इ॰ दु॰ प॰

−·००००००३ इ॰ ति॰ प॰

यांत प= ·००२३५१६, प'= −·००००१२५, प''= −·००००००३

भु॰(३°·६'·१५'')=८·७२८३३६५+$\frac{९}{४}$×·००२३५१६+$\frac{९}{४}$×$\frac{५}{८}$×

−·००००१२५+$\frac{९}{४}$×$\frac{५}{८}$×$\frac{१}{१२}$×−·००००००३=८·७३३५५५८ हें उ॰

दुसरें कृत्य

वजावाकीचे रीतीनें श्रेढीचें सर्वधन काढावयाचें

रीति· सांगितले श्रेढीचें सर्वधन स धरून प्रथम पदास स्थलांतर करावें आणि त्यास असा एक गुणक किंवा भाजक लावावा कीं, जेणें करून श्रेणीचा डावे कडील पदें प्रथम श्रेणींतील डावे कडील पदावर

बर होईल. नंतर दोन समीकरणाची वजावाकी करून त्यापासून उत्तर काढावें.

उदाहरणें.

(१) $\frac{१}{२}, \frac{१}{४}, \frac{१}{८}, \frac{१}{१६}$, इ० या श्रेढीचें सर्वधन काढ.

$\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+$ इ० $=$ स, स्थ०क० $\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+$ इ० $=$ स $-\frac{१}{२}$

२नीं गु० $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+$ इ० $=$ २स $-$ १ यांत पूर्व समीकरण वजा क० ० $=$ स $-$ १ $\therefore$ स $=$ १ हें उ० अथवा स $= \frac{र^न-१}{र-१} \times$ अ यांत र अपूर्णांक असून ग म्ह अनंत आहे. याजकरितां स $= \frac{अ}{१-र} = \frac{\frac{१}{२}}{१-\frac{१}{२}} = १$ भूमितिश्रेढींत सिद्ध केल्या प्र०.

(२) .११६११६११६११६ इ० याची किंमत व्यवहारी अपूर्णांकांत काढ. उत्तर, $\frac{११६}{९९९}$

चिन्हांविषयीं.

पदार्थांवांचून जसे सामान्य धर्म असत नाहींत, व त्यांचे नियम करितां येत नाहींत, त्याप्रमाणेंच पदार्थांवांचून चिन्हाचे नियम सांगतां येत नाहींत; याजकरितां पदाश्रयानें चिन्हाचे विचार.

व्याख्या.

१ धन पद तेंच आहे, जें पद जमा अथवा शिल्लक आहे. जसें +१अ म्हणजे १अ मध्यें जितकी संख्या आहे, त्याचे निष्पट कांहीं तरी शिल्लक अ० जमा आहे.

२ ऋण पद तेंच आहे, जें पद खर्च, कमी अ० कर्ज आहे. जसें −१अ म्हणजे १अ मध्यें जितकी संख्या आहे, त्याचे निष्पट कर्ज, कमी अ० देणें आहे.

प्रथम प्रकार.

मिळवणी.

१ धन धन पदांची बेरीज धन, कारण शिलकेंत आणखी शिलक मिळविली, तर शिलकच वाढत जाईल.

२ धनऋण पदांची बेरीज धन अ॰ ऋण. जर धनपद मोठें आणि ऋण पद लहान असेल, तर बेरीज धन; ह्मणजे जास्त जमेशीं कमी खर्च मिळविला असतां, जमा (धन) राहाते. जर धनपद लहान आणि ऋण पद मोठें, तर बेरीज ऋण. ह्मणजे कमी जमेशीं जास्त खर्च मिळविला असतां ऋण (कर्ज) राह्यतें.

३ ऋणऋण पदांची बेरीज ऋण. ह्मणजे कर्जाच्या किती ही रकमा घेतल्या तरी कर्ज (ऋण) होतें.

उदाहरणें.

(१)	(२)	(३)	(४)
४अ+३अ=७अ	४अ−२अ=२अ	४अ−५अ=−अ	−४अ−३अ=−७अ

दुसरा प्रकार.

वजाबाकी.

१ धन धन पदांची वजाबाकी धन अ॰ ऋण, कारण धन वजा करणें ह्मणजे प्रथम प्रकारा प्र॰ ऋण मिळविणें.

२ ऋण ऋण पदांची वजाबाकी धन अ॰ ऋण होते. कारण ऋण वजा करणें ह्मणजे धन मिळविणें. जसें एका मनुष्यानें २अ रु॰ देणें आहेत, ते देण्याकरितां २अ धन असल्या वांचून देतां येणार नाहींत. तेव्हां ऋण वजा करणें ह्मणजे धन मिळविणें.

३ धनऋण अ॰ ऋण धन पदांची वजाबाकी धन अ॰ ऋण. वरील प्रकारा प्र॰

उदाहरणें

(१) ४अ−(३अ)=+अ	(३) −४अ−(−३अ)=−अ	(५) ४अ−(−५अ)=९अ
(२) ४अ−(५अ)=−अ	(४) −४अ−(−५अ)=अ	(६) −४अ−(+५अ)=−९अ

तिसरा प्रकार.

गुणाकार.

१ धन धन पदांचा गुणाकार धन ह्मणजे धन रकमा कितीही वेळां घेतल्या तरीं धन होतात.

२ धन ऋण अ॰ ऋण धन पदांचा गुणाकार ऋण. कारण ऋण रकमा कितीही वेळां घेतल्या तरीं ऋण होतात.

३ ऋण रकम ऋण वेळां घेणें ह्मणजे दुसऱ्या प्रकारांत सांगितल्याप्र॰ धन मिळविल्याप्रमाणें आहे. जसें, (अ-अ) = ० यास -क याणें गुण. (अ-अ) × -क = ०, प्रत्यक्ष गु॰ प्रथ॰ पदाचा गुणा॰ -अक, आतां दुसऱ्या पदाचा गु॰ अक हा निश्चय अधिक असेल, तेव्हांच दोनही पदांचा बेरीज शून्याबरोबर होईल.

उदाहरणें

(१) +४अ × +३अ = +१२अ	(२) -४अ × +३अ = -१२अ
(३) +४अ × -३अ = -१२अ	(४) -४अ × -३अ = +१२अ

चवथा प्रकार.

भागाकार.

१ भागाकार गुणिले भाजक = भाज्य आहे याजकरितां भाज्य भाजक दोनही धन आहेत तेव्हां भागाकार धन हें उघड आहे.

२ भाज्य आणि भाजक दोनही ऋण आहेत तेव्हां भागाकार धन. कारण धन भाग॰ ऋण भाजकानें गुणिला असतां भाज्य ऋण होतो.

३ ऋण भाज्य आणि धन भाजक अथवा धन भाज्य आणि ऋण भाजक यांचा भागाकार ऋण. कारण ऋण भागाकार धन भाजकानें गुणिल्यास भाज्य ऋण. अथवा ऋण भागाकार ऋण भाजकानें गुणिल्यास धन भाज्

उदाहरणें.

(१) $+८अ \div +४अ = +२अ$	(२) $-८अ \div +४अ = -२अ$
(३) $+८अ \div -४अ = -२अ$	(४) $-८अ \div -४अ = +२अ$

पांचवा प्रकार.

वर्गघनादि.

१ धन पदांचे सर्व घात धन.

२ ऋण पदांचे सम घात धन आणि विषम घात ऋण. कारण ऋण ऋण पदांचा गुणाकार नि॰ प्रकारांत सांगि॰ प्र॰ धन आणि त्यास पुनः ऋण पदानें गुणिलें असतां, त्याच प्रकारा॰ ऋण होतो.

उदाहरणें.

(१) $(+४अ^२)^२ = १६अ^४$ | (२) $(-४अ)^४ = २५६अ^४$ | (३) $(-४अ)^३ = -६४अ^३$ | (४) $(+४अ)^३ = ६४अ^३$

सहावा प्रकार.

वर्गघनादि मूळें.

१ धन पदांची सम घात मूळें धन आणि ऋण. कारण धन अथवा ऋण पदांचे सम घात वरील प्रकारा॰ धन होतात. धन पदांची विषम घात मूळें मात्र प्रका॰ प्र॰ धन.

२ ऋण पदांची विषम घात मूळें ऋण आणि सम घात मूळें अशक्य. कारण धन अथवा ऋण पदांचे कोणतेही सम घात ऋण होत नाहींत.

उदाहरणें

(१) $(+४अ^२)^{\frac{1}{2}} = २अ$ | (२) $(-२५६अ^४)^{\frac{1}{4}} =$ अशक्य | (३) $(+८अ^३)^{\frac{1}{3}} = २अ$ | (४) $(-८अ^३)^{\frac{1}{3}} = -२अ$

गणितसार.

भागत्ववथा.

लाग्रतंम

लाग्रतंम ह्मणजे गुणोत्तराचे संख्येंत घातप्रकाशक आहे.

जसें $प^{क्ष} = ब$ असेल, तर ब संख्येचें लाग्रतंम क्ष आहे, प गुणोत्तरानें अथवा पायानें.

कठिण हिशेब सुगम होण्यासाठीं लाग्रतंमे केलीं आहेत; तीं हें करितात कीं, मिळवणीनें गुणाकार, वजाबाकीनें भागाकार, घात प्रकाशकानें गुणिल्यानें, घातादि वृद्धी आणि मूळ प्रकाशकानें भागिल्यानें घातादि मूळ.

कोणती ही भूमितिश्रेढी शून्य घाता पासून चढत किंवा उतरत गेली, तिजकरितां घातप्रकाशक (लाग्रतंमे) गणितश्रेढी शून्या पासून

+हें सिद्ध करण्यासाठीं अ, ब, क अथवा २, ३, १० हीं पदें घेऊन.

प्रथमप्रकार.

$$\left\{\begin{aligned} अ^{३} \times अ^{२} &= अ^{(३+२)} = अ^{५} \\ ब^{३} \times ब^{२} &= ब^{(३+२)} = ब^{५} \\ क^{३} \times क^{२} &= क^{(३+२)} = क^{५} \end{aligned}\right\} \text{गुणाकार} \left\{\begin{aligned} २^{३} \times २^{२} &= २^{(३+२)} = २^{५} \\ ८ \times ४ &= ३२ \\ ३^{३} \times ३^{२} &= ३^{(३+२)} = ३^{५} \\ २७ \times ९ &= २४३ \\ १०^{३} \times १०^{२} &= १०^{(३+२)} = १०^{५} \\ १००० \times १०० &= १००००० \end{aligned}\right\}$$

यावरून सिद्धांत - घातप्रकाशकांची (लाग्रतंमांची) वेरीज [illegible] संख्येचें लाग्रतंम होतें.

एक उत्तरानें चढत किंवा उतरत आहेत जसें. ....

-४	-३	-२	-१	०	१	२	३	४	ग० श्रे० अ० ला०
$\frac{१}{१६}$	$\frac{१}{८}$	$\frac{१}{४}$	$\frac{१}{२}$	१	२	४	८	१६	यातील श्रेढ्यांची
$२^{-४}$	$२^{-३}$	$२^{-२}$	$२^{-१}$	$२^{०}$	$२^{१}$	$२^{२}$	$२^{३}$	$२^{४}$	भूमितिश्रेढी.
$\frac{१}{८१}$	$\frac{१}{२७}$	$\frac{१}{९}$	$\frac{१}{३}$	१	३	९	२७	८१	
$३^{-४}$	$३^{-३}$	$३^{-२}$	$३^{-१}$	$३^{०}$	$३^{१}$	$३^{२}$	$३^{३}$	$३^{४}$	भूमितिश्रेढी.
$\frac{१}{१००००}$,	$\frac{१}{१०००}$	$\frac{१}{१००}$	$\frac{१}{१०}$	१	१०	१००	१०००	१००००	
.०००१	.००१	.०१	.१	१					भूमितिश्रेढी.
$१०^{-४}$	$१०^{-३}$	$१०^{-२}$	$१०^{-१}$	$१०^{०}$	$१०^{१}$	$१०^{२}$	$१०^{३}$	$१०^{४}$	

दुसरा प्रकार.

$$\left\{\begin{array}{l} अ^{३} \div अ^{२} = \frac{अ^{३}}{अ^{२}} = अ^{(३-२)} = अ \\ व^{३} \div व^{२} = \frac{व^{३}}{व^{२}} = व^{(३-२)} = व \\ क^{३} \div क^{२} = \frac{क^{३}}{क^{२}} = क^{(३-२)} = क \end{array}\right\} \text{भागा०} \left\{\begin{array}{l} २^{३} \div २^{२} = २^{(३-२)} = २ \\ ८ \div ४ = २ \\ ३^{३} \div ३^{२} = ३^{(३-२)} = ३ \\ २७ \div ९ = ३ \\ १०^{३} \div १०^{२} = १०^{(३-२)} = १० \\ १००० \div १०० = १० \end{array}\right\}$$

यावरून सिद्धांत. घातप्रकाराकांची (लाग्रतंभांची) वजाबाकी त्या दोन संख्यांचे भागाकाराचे लाग्रतम होते.

तिसरा प्रकार.

$$\left\{\begin{array}{l} अ^{२} \times अ^{२} \times अ^{२} = अ^{(२\times३)} = अ^{६} \\ व^{२} \times व^{२} \times व^{२} = व^{(२\times३)} = व^{६} \\ क^{२} \times क^{२} \times क^{२} = क^{(२\times३)} = क^{६} \end{array}\right\} \text{वर्गादि} \left\{\begin{array}{l} २^{२} \times २^{२} \times २^{२} = २^{(२\times३)} = २^{६} \\ ४ \times ४ \times ४ = ६४ \\ ३^{२} \times ३^{२} \times ३^{२} = ३^{(२\times३)} = ३^{६} \\ ९ \times ९ \times ९ = ७२९ \\ १०^{२} \times १०^{२} \times १०^{२} = १०^{(२\times३)} = १०^{६} \\ १०० \times १०० \times १०० = १०००००० \end{array}\right\}$$

यावरून सिद्धांत घातप्रकाराकास (लाग्रतंभास) सांगितले घातप्रकाराकानें गुणिलें असतां, त्या संख्येचे वर्गादिकाचें लाग्रतम होतें.

चवथा प्रकार.

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[३]{अ^{६}} = अ^{\frac{६}{३}} = अ^{२} \\ \sqrt[२]{व^{४}} = व^{\frac{४}{२}} = व^{२} \\ \sqrt[३]{क^{६}} = क^{\frac{६}{३}} = क^{२} \end{array}\right\} \text{घातादिमूळ} \left\{\begin{array}{l} \sqrt[३]{२^{६}} = २^{\frac{६}{३}} = २^{२} = ४ \\ \sqrt[२]{३^{४}} = ३^{\frac{४}{२}} = ३^{२} = ९ \\ \sqrt[३]{१०^{६}} = १०^{\frac{६}{३}} = १०^{२} = १०० \end{array}\right\}$$

यांत स्पष्ट आहे कीं, एकच स्वाभाविक संख्येस लाग्रतंमाचा जाति
अनेक आहेत, जसें वरच्या भूमिति श्रेढींत २, १० इ. अथवा दुसरे
कोणते ही श्रेढींत.

जीं लाग्रतंमें कामांत फार उपयोगी पडतात, त्यांस अशा भूमिति
श्रेढीशीं संबंध केलीं आहेत कीं, त्या श्रेढीचीं पदें दश गुण वाढतात.
जसें पूर्व श्रेढ्यांतील शेवटील श्रेढी. सांप्रत बहुत करून पुस्तकांत
जे लाग्रतंम कोष्टक आहेत, ते याच श्रेढी पासून उत्पन्न केले आहेत
या लाग्रतंमास व्यवहारीक लाग्रतंम ह्मणतात. आणि याचा पाया
१० आहे. शिवाय ज्याचा पाया २.७१८२८१८२८४५९ आहे त्यास हे
पर्बालिक लाग्रतंम ह्मणतात.

पायाचें लाग्रतंम कोणत्या ही लाग्रतमाचे जातींत एक असतें. ज
सें वरील तिन्ही श्रेढ्यांत २, ३, १० हे पाये असून त्याचें लाग्रतंम एक
आहे.

कोणत्याही संख्येचें लाग्रतंम काढणें.

प्रथम रीति. जेव्हां संख्या १ आणि १० अथवा १० आणि १०० अ
थवा १०० आणि १००० इ. यांचे मध्यें आहे तेव्हां दोन सन्निध सं
ख्यांचें भूमिति मध्य प्रमाण काढावें; असें कीं, ज्याचे मध्यें इच्छिली
संख्या आहे. नंतर इच्छिली संख्या या भूमिति मध्य प्रमाणाहून
अधिक असेल तर हें भूमिति मध्य प्रमाण आणि मोठी संख्या यां
चें पुनः मध्य प्रमाण काढावें. आणि संख्या याहून कमी असेल त
र हें मध्य प्रमाण आणि लहान संख्या याचें मध्य प्रमाण काढावें.

या वरून सिद्धांत - घात प्रकाशकास (लाग्रतंमास) सांगितले घात मूळ
प्रकाशकानें भागिल्यानें त्या संख्येचे इच्छिले मूळाचें लाग्रतंम होतें.

याप्रमाणें इच्छिली संख्या अथवा तिचे अति संनिध दुसरी संख्या मध्य प्रमाणानें येई पर्यंत करावें. आणि जितकीं वेळ जशी भूमिति मध्यप्रमाणें काढिलीं, तितकीं वेळ तशी त्या दोन मूळ संख्यांचे लाग्रतंमांचीं गणित मध्यप्रमाणें काढावीं. म्हणजे तीं अनुक्रमानें त्या त्या भूमिति मध्यप्रमाण पदांचीं लाग्रतंमें होतील.

उदाहरणें.

(१) ६ या संख्येचें लाग्रतंम काढ. इच्छिली संख्या १ आणि १० यांचे मध्यें आहे याजकरितां

संख्या.		लाग्रतंम.	
$\sqrt{१\times१०}$	$=३\cdot१६२२७७७\cdots$	$\frac{०+१}{२}$	$=\cdot५$
$\sqrt{१०\times३\cdot१६२२७७७}$	$=५\cdot६२३४१३२\cdots$	$\frac{१+\cdot५}{२}$	$=\cdot७५$
$\sqrt{१०\times५\cdot६२३४१३२}$	$=७\cdot४९८९४२०\cdots$	$\frac{१+\cdot७५}{२}$	$=\cdot८७५$
$\sqrt{५\cdot६२३४१३२\times७\cdot४९८९४२०}$	$=६\cdot४९३८१६३\cdots$	$\frac{\cdot७५+\cdot८७५}{२}$	$=\cdot८१२५$
$\sqrt{५\cdot६२३४१३२\times६\cdot४९३८१६३}$	$=६\cdot०४२९६३९\cdots$	$\frac{\cdot७५+\cdot८१२५}{२}$	$=\cdot७८१२५$ उ०

(२) ६५ या संख्येचें लाग्रतंम काढ.

उत्तर, १·८१२९१३

दुसरी रीति. ज्या संख्येचें लाग्रतंम काढणें ती संख्या = व घेआणि ती संख्या एकानें उणी = अ घे तेव्हां व+अ = २व-१ = २अ+१ = स तेव्हां

$$\text{ला}\circ\left(\frac{\text{व}}{\text{अ}}\right) = \text{ला}\circ \text{व} - \text{ला}\circ \text{अ} = \frac{\cdot८६८५८८९६३८}{\text{स}} + \frac{\cdot८६८५८८९६३८}{३\text{स}^३} + \frac{\cdot८६८५८८९६३८}{५\text{स}^५} + \text{इ}\circ,$$

अ॰ $\text{ला}\circ \text{व} = \text{ला}\circ \text{अ} + \frac{\cdot८६८५८८९६३८}{\text{स}} \times \left(१ + \frac{१}{३\text{स}^२} + \frac{१}{५\text{स}^४} + \frac{१}{७\text{स}^६} + \text{इ}\circ\right)$

अथवा.

$$\frac{.८६८५८८९६३८}{स}=अ \qquad अ\div१=\frac{अ}{१}$$

$$\frac{अ}{स^२}=ब. \qquad ब\div३=\frac{ब}{३}$$

$$\frac{ब}{स^२}=क \qquad क\div५=\frac{क}{५}$$

$$\frac{क}{स^२}=ड \qquad ड\div७=\frac{ड}{७}$$

इत्यादि. $\qquad$ ह ही सर्व भा॰ बे॰

याजकरितां $ला॰ ब= ला॰ अ+ह$.

लाग्रतंमाची उपपत्ति.

(ब) कोणी एक संख्या असेल, आणि ती संख्या एकानें ऊणी = अ आणि अ+ब=स असेल तर, $ला॰ ब=ला॰ अ+\frac{.८६८५८८९६३८}{स}\times(१+\frac{१}{३स^२}+\frac{१}{५स^४}+\frac{१}{७स^६}+\frac{१}{९स^८}+इ॰)$ होईल.

कारण इछिल्या लाग्रतंमाचा पाया (प) आणि इछिल्या संख्येचें लाग्रतंम (क्ष) आहे असें मनांत आणावें. तर लाग्रतंमाचा गुणाप्रमाणें $प^{क्ष}=ब$ यांत $प=१+म$ आणि $ब=१+अ$ असें लिहून, $(१+म)^{क्ष}=१+अ$ या समीकरणाचा य घात करून, दोहीं बाजूंतून १ रद्द करून, यनें भागून, नंतर य ला (०) किंमत देऊन आणि साधारण गुणक सोडवून, हें होतें. $क्ष=ला॰(१+अ)=\frac{अ-\frac{१}{२}अ^२+\frac{१}{३}अ^३-\frac{१}{४}अ^४+-इ॰}{म-\frac{१}{२}म^२+\frac{१}{३}म^३-\frac{१}{४}म^४+-इ॰}$

यांत म ची किंमत लिहून, $क्ष=ला॰(१+अ)=\frac{अ-\frac{१}{२}अ^२+\frac{१}{३}अ^३-\frac{१}{४}अ^४+-इ॰}{(प-१)-\frac{१}{२}(प-१)^२+\frac{१}{३}(प-१)^३-\frac{१}{४}(प-१)^४+इ॰}$ प्रथ॰ समी॰

$\frac{१}{(प-१)-\frac{१}{२}(प-१)^२+\frac{१}{३}(प-१)^३-\frac{१}{४}(अ-१)^४+-इ॰}=ग$ धरिल्यानें वरील समीकरणास हें रूप होतें. $क्ष=ला॰(१+अ)=ग(अ-\frac{१}{२}अ^२+\frac{१}{३}अ^३-\frac{१}{४}अ^४+-इ॰)$ .... दुसरें समी॰

ह्या लाग्रतंमाचा साधारण सारणी कोष्टक झाला; परंतु यांत (अ) पूर्णांक संख्या असल्यास याचीं पदें उत्तरोत्तर वाढतात, ह्मणून ह्या गणित करण्यास उपयोगी नाहीं; याज करितां दुसरा कोष्टक उत्पन्न केला पाहिजे.

वरील समीकरणांत अचा ठिकाणीं (−अ) करून, $\text{लॉ०}(१-\text{अ}) = \text{ग}(-\text{अ}-\frac{१}{२}\text{अ}^{२}-\frac{१}{३}\text{अ}^{३}-\frac{१}{४}\text{अ}^{४}-\text{इ०})$ .... तिसरें समीकरण.

हें समीकरण दुसरे समीकरणांतून वजा करून, $\text{लॉ०}(१+\text{अ}) - \text{लॉ०}(१-\text{अ}) = \text{लॉ०}\left(\frac{१+\text{अ}}{१-\text{अ}}\right) = २\text{ग}(\text{अ}+\frac{१}{३}\text{अ}^{३}+\frac{१}{५}\text{अ}^{५}+\frac{१}{७}\text{अ}^{७}+\text{इ०})$ चवथें स०

आतां $\text{अ} = \frac{१}{२\text{क}+१}$ मानिला तर $\frac{१+\text{अ}}{१-\text{अ}} = \frac{\text{क}+१}{\text{क}}$ ही किंमत चवथे समीकरणात लिहून, $\text{लॉ०}(\text{क}+१) - \text{लॉ०}\,\text{क} = २\text{ग}\left(\frac{१}{२\text{क}+१}+\frac{१}{३(२\text{क}+१)^{३}}+\frac{१}{५(२\text{क}+१)^{५}}+\frac{१}{७(२\text{क}+१)^{७}}+\text{इ०}\right)$ .... पांचवें समीकरण.

या समीकरणांत अचा कांहीं संबंध राहिला नाहीं. क कोणती ही साधारण संख्या आहे यास्तव क = अ मानिल्यास चिंता नाहीं; आणि प्रथम अ+ब = स मानिला आहे तेव्हां २क+१ = स या किंमती वरील समीकरणात लिहून, स्थलांतर करून, छेदांतून साधारण गुणक काढून, $\text{लॉ०}(१+\text{अ}) = \text{लॉ०}\,\text{अ} + \frac{२\text{ग}}{\text{स}} \times \left(१+\frac{१}{३\text{स}^{२}}+\frac{१}{५\text{स}^{४}}+\frac{१}{७\text{स}^{६}}+\frac{१}{९\text{स}^{८}}+\text{इ०}\right)$ .... सहावें समीकरण.

यांत दोन गची किंमत काढणें आहे.

वर दुसरे समीकरणांत लिहिल्याप्रमाणें ग हा स्थिर गुणक प्रतिलाग्रतंम श्रेढींत आहेत, ह्मणून तो प्रतिलाग्रतंम श्रेढींत भिन्न भिन्न आहे यास्तव जा श्रेढींत $\text{ग} = \frac{१}{(\text{प}-१)-\frac{१}{२}(\text{प}-१)^{२}+\frac{१}{३}(\text{प}-१)^{३}-\frac{१}{४}(\text{प}-१)^{४}\,\text{इ०}} = १$ होतो त्या श्रेढीला हैपर्बालिक अशी संज्ञा आहे, यावरून ग = १

केल्यास वरचा समीकरणांतील छेदस्थळींचें पद (१) ह्मणजे प याचें लाग्रतंम आहे. यास्तव प=१० कल्पिल्यास व्यवहारीक श्रेढींतील स्थिर गुणक ग= $\frac{१}{हैं॰ ला॰ १०}$

आतां हैं॰ ला॰ १० = ला॰ २ + ला॰ ५, ला॰ २ = ० + $\frac{२}{३}$ (१ + $\frac{१}{३×३^२}$ + $\frac{१}{५×३^४}$ + $\frac{१}{७×३^६}$ + इ॰) = ·६९३१४७ सहावे समीकरणाप्रमाणें ला॰ ४ = २ ला॰ २ = १·३८६२९४४, ला॰ ५ = १·३८६२९४४ + $\frac{२}{९}$ (१ + $\frac{१}{३×९^२}$ + $\frac{१}{५×९^४}$ + $\frac{१}{७×९^६}$ + इ॰) = १·६०९४३७९ यास्तव हैं॰ ला॰ १० = ला॰ २ + ला॰ ५ = ·६९३१४७२ + १·६०९४३७९ = २·३०२५८५१ ह्मणून ग = $\frac{१}{हैं॰ ला॰ १०}$ = $\frac{१}{२·३०२५८५१}$ = ·४३४२९४४ ही किंमत सहावे समीकरणांत ठेवून, त्यास हें रूप होतें. ला॰ (१+अ) = ला॰ अ + $\frac{·८६८५८८९६३८}{स}$ × (१ + $\frac{१}{३स^२}$ + $\frac{१}{५स^४}$ + $\frac{१}{७स^६}$ + इ॰) हें सिद्ध.

गची किंमत निर्माण झाल्यावर व्यवहारीक श्रेढींतील लाग्रतंमास हैंपर्बालिक किंवा दुसरे श्रेढींत नेणें झाल्यास सुलभ होईल.

उदाहरणें.

(१) २ या संख्येचें लाग्रतंम काढ.

एथें इछिली संख्या २=ब आणि त्यापेक्षां एकानें उणी संख्या १=अ आहे आणि स=२+१=३ आणि स२=९ आहेत तेव्हां लाग्रतंम कोष्टकाप्रमाणें.

३) ·८६८५८८९६४ १) ·२८९५२९६५४ (·२८९५२९६५४
९) २८९५२९६५४ ३) ३२१६९९६२ (१०७२३३२१
९) ३२१६९९६२ ५) ३५७४४४० (७१४८८८
९) ३५७४४४० ७) ३९७१६० (५६७३७

९)	३९७१६०	९)	४४१२९ (		४९०३
९)	४४१२९	११)	४९०३ (		४४६
७)	४९०३	१२)	५४५ (		४२
७)	५४५	१५)	६१ (		४
८)	६१				

२चें लाग्र० ·३०१०२९९९५

१चें लाग्र० ·००००००००

२चें लाग्र० ·३०१०२९९९५ हें उत्तर.

(२) ३या संख्येचें ला० काढ.

प्रथमउदाहरणाप्रमाणें कृतिकरून हें होतें. ·४७७१२१२५५ हें उत्तर.

(३) ४या संख्येचें ला० काढ.

२×२=४ याज करितां २चें लाग्रतंम=·३०१०२९९९५ यांत २चें ला० मिळवून ४चें लाग्र०=·६०२०५९९९१ हें उत्तर.

(४) ९या संख्येचें ला० काढ.

३×३=९ याज करितां ३चें लाग्रतंम =·४७७१२१५४ यांत ३चें लाग्रतंम मिळवून ९ चें लाग्रतम=·९५४२४२५०८ हें उत्तर.

वर लिहिल्या रीतीनीं ७, ११, १२, १७, १९, २३ इ० संख्यांचीं लाग्रतंमें काढल्यानंतर गुणाकारानें आणि भागाकारानें दुसरीं अनेक संख्यांचीं लाग्रतंमें काढितां येतील.

लाग्रतंम कोष्टक कामांत घेण्याची रीति.

एका पेक्षां अधिक पूर्ण संख्यांची लाग्रतंमें काढण्याचा रीति वर लिहिल्या. आतां अपूर्ण संख्यांचीं लाग्रतंमें काढण्याच्या रीति लिहितों.

सामान्यतः सरूप सर्व संख्या पूर्णांक, अपूर्णांक अथवा मिश्र

कशा ही असोत, तथापि त्यांचे लाग्रतंमीक दशांश एकच आणि ते सर्वदा धन असतील. प्रकाशक मात्र धन किंवा ऋण होतील. जसें, ५१२ या संख्येचें लाग्रतंम २.७०९२७० आहे. आणि या संख्येचे $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ इत्यादि यांचीं लाग्रतंमें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतील.

संख्या	लाग्रतंमें
५१२	२.७०९२७०
५१.२	१.७०९२७०
५.१२	०.७०९२७०
.५१२	१̄.७०९२७०
.०५१२	२̄.७०९२७०

यावरून स्पष्ट आहे कीं, संख्येंत पूर्णांक स्थळें जितकीं आहेत, त्यांत एक कमी धन प्रकाशक आणि पूर्णांकनसून दशांश आहेत, तेव्हां दशांशाचा प्रथम अंक जितके स्थळावर आहे तितके ऋण प्रकाशक असावें.

कोष्टकांतून कोणते ही संख्येचें लाग्र० काढणें.

प्रथम रीति. जेव्हां संख्या दहाचे आंत आहे तेव्हां संख्या शब्द

+ ५१२ कोणी एक संख्या असेल तर, तिचे बरोबर $10^2 \times$ दहा पूर्णांकाचे आंत कोणती तरी धन संख्या आहे, म्हणजे एथें ५.१२ आहे याचें बरोबर (अ) घे आतां मागें सांगितल्या प्रमाणें १ आणि १० यांचे मधील कोण संख्येचें ला० शून्य अ० प कांहींतरी द० म्हणजे एथें .७०९२७ आहेत, याचें बरोबर. व घे. आतां ५१२ किंवा याचे $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ इत्यादिकाचें लाग्रतंमा विषयीं विचार

५१२ $= 10^2 \times$ अ, ५१.२ $= \frac{512}{10} = \frac{10^2 \times अ}{10}$, .०५१२ $= \frac{512}{10000} = \frac{10^2 \times अ}{10^4}$ यांत लाग्रतंमाचा नियमा प्रमाणें ला०(10^2) + ला० अ = २ + ब = २.७०९२७

ला०(10^2) + ला० अ − ला०(10) = २ + ब − १ = १ + ब = १.७०९२७

ला०(10^2) + ला० अ − ला०(10^4) = २ + ब − ४ = −२ + ब = −२.७०९२७

यावरून पहातां साधारण एकच संख्या पूर्णांक, अपूर्णांक अथवा मिश्र कशी ही असो, तरी तिचें लाग्रतंमीक दशांश एकच असून ते धन आहेत आणि प्रकाशक मात्र भिन्न आहेत हें सिद्ध.

च्चे समोर अंक लिहिले आहेत, ते पाहून त्यांचे खालीं वरच्याचे समोरील त्या त्या संख्येचें लाग्रतंम घ्यावें. आणि त्यास वर सांगितल्या प्रमाणें प्रकाशक लिहावा.

दुसरीरीति. जेव्हां संख्या १०हून अधिक आणि १००चे आंत आहे. अथवा संख्येंत दोन अंक स्थानें आहेत. तेव्हां संख्या शब्दाच्चे खालीं दोन दोन अंकांचा ओळी आहेत. त्यांत ते अंक पाहून त्या अंकाच्चे समोर लाग्रतंम लिहिलें आहे तें घ्यावें आणि त्यास रीती प्रमाणें प्रकाशक लिहावा. जसें ६५ या संख्येच्चे ला० १.८१२९१

तिसरीरीति. जेव्हां संख्या १००चे वर आणि १०००च्चे आंत आहे अथवा संख्येंत तीन अंक स्थानें आहेत. त्यांत संख्येचा वरील तिसरा अंक असेल तो पाहून त्याखालीं पूर्व दोन अंकांचे समोरील कोष्टकांतील अंक घेऊन, मागें दशांश चिन्ह करावें. आणि त्यास रीती प्रमाणें प्रकाशक लिहावा. जसें ६४८ या संख्येचें लाग्रतंम २.८११५७ आहे.

चवथीरीति. जेव्हां संख्येंत तिहीं पेक्षां अधिक स्थळें आहेत, तेव्हां प्रथम डावे कडील तीन अंकांचें लाग्रतंम पूर्वरीतीनें काढावें. आणि त्याचें जवळचें अधिक लाग्रतंम घेऊन त्या दोन लाग्रतंमांची वजाबाकी व त्यांच्चे संख्यांची वजाबाकी[+] करून त्या दोन बाक्या काढाव्या, नंतर या प्रमाणें त्रैराशिक करावें. जशी दोन संख्यांची वजाबाकी संख्येंतील बाकी राहिले अंकांस :: तशी त्या दोन लाग्रतंमांची वजाबाकी : संख्येच्चे लाग्रतंमास.

+ वजाबाकी करते वेळीं दोन ही संख्यांवर शून्यें इतकीं घ्यावीं कीं, मूळ संख्येंत तिहीहून जितकीं अंकस्थानें अधिक आहेत.

आतां हें इच्छाफळ पूर्व लाग्रतंमांत जें लहान असेल त्यांत मि ळवून बेरीज घ्यावी आणि रीतिप्रमाणें प्रकाशक लिहावे; म्हण जे हें सांगितल्या सर्व संख्येचें लाग्रतंम झालें.

उदाहरण.

३४०९२६ या संख्येचें लाग्रतंम काढायाचें.

३४०००० या संख्येचें लाग्रतंम = ५३१४८

३४१००० या संख्येचें लाग्रतंम = ५३२७५

वजा १००० बाकी आणि वजा ००१२७ बाकी.

तेव्हां असें १००० : ९२६ :: ००१२७ : ०११७६०२ इच्छाफळ

हें इच्छाफळ ऊनतर लाग्रतंम ५३१४८ यास मिळवून ५३२६५ यास संख्येंतील पूर्णांक स्थळा प्रमाणें प्रकाशक देऊन १.५३२६५ हें सांगितल्या संख्येचें प्रकाशक फळ लाग्रतंम झालें.

सांगितलें लाग्रतंमापासून संख्या काढावयाची रीति.

सांगितलें लाग्रतंम कोष्टकांत शोधून त्याची संख्या काढावी, आणि प्रकाशका वरून त्या संख्येंत दशांश चिन्ह करावें.

परंतु जर सांगितलें लाग्रतंम कोष्टकांत बरोबर मिळत नाहीं, तर त्या लाग्रतंमाहून एक अधिक आणि एक उणें अशीं दोन ला ग्रतंमें कोष्टकांतून काढून, त्यांची वजाबाकी व लाग्रतंमांचे सं ख्यांची वजाबाकी करावी नंतर ऊनतर लाग्रतंम आणि सांगि तलें लाग्रतंम यांची वजाबाकी करून या प्रमाणें राशी कराव्या.

नेः संख्याव्यवहारी अपूर्णांक असल्यास त्याला दशांश अपूर्णांका चें रूप देऊन, नंतर वर सांगितल्या प्रमाणें लाग्रतंम काढावें.

जशी लाग्रतंमांची वजाबाकी, खरें लाग्रतंम आणि ऊनतर लाग्रतंम यांचे वजाबाकीस, तशी संख्यांची वजाबाकी तिचे संख्येस प्रमाण होते.

हें इच्छाफळ ऊनतर संख्येंत मिळवावें. आणि प्रकाशकावरून त्यास दशांश चिन्ह करावें. ह्मणजे ही सांगितलो लाग्रतंमांची संख्या होईल.

उदाहरण.

(१) सांगितलें लाग्रतंम १·८६५३१ यांची संख्या काढ.

अधिकतर ·८६५७० याची संख्या ७२४०० सांगि० ला० ·८६५३१
ऊनतर ·८६५१०   ७३२००   ·८६५१०
·०००६०   १००   ·०००२१

तरजसें, ·०००६० : ·०००२१३ :: १०० : ३५५ हें इच्छाफळ ऊनतर लाग्रतंमास मिळवून ७२४३५ ही सांगितल्या लाग्रतंमाची संख्या झाली.

(२) –२·६५११५ यांची संख्या काढ.

उत्तर ·०४४७८

लाग्रतंमानें गुणाकार करण्याची रीति.

गुण्य आणि गुणक यांचे लाग्रतंमांची बेरीज घ्यावी ती गुणाकाराचें लाग्रतंम होईल, त्या पासून पूर्व रीतीनें संख्या काढावी. ती संख्या गुणाकार होईल.

लाग्रतंम दशांशांची बेरीज घेते वेळीं शेवटीं हातचा येईल, तो धन. याजकरितां प्रकाशक ऋण असल्यास त्यांत तो हातचा वजा

करावा आणि धनअसल्यास मिळवावा.

उदाहरणें.

(१) २२·१४यांस ५·०६२यांणीं गूण. | (२) ·०५८१९यांस २·८५७२०यांणीं गूण.

संख्या.		लाग्र.	संख्या.	लाग्र.
२२·१४	=	१·३४५१२६ गुण्य	·०५८१९२	= २·७६४८०६
५·६२	=	०·७०४३२ गुणक	२·४५७२९	= ०·५३१८७३
११७·१२४६	=	२·०४९५६८ गुणाकार	·२०११८१	= -१·३०३५९

लाग्रतंमानें भागाकार करण्याचीरीति.

भाज्याचे लाग्रतंमांत भाजकाचें लाग्रतंम वजा करावें, बाकीरा हील ती भागाकाराचें लाग्रतंम होईल, नंतर त्यापासून संख्या काढावी, ती भागाकार होईल.

वजाबाकी करते वेळीं दशांशाचे शेवटास हातचा येईल. तो धन आहे तेव्हां भाजक मकाशक धनअसल्यास त्यांत तो मि ळवावा. आणि ऋण असल्यास वजा करावा. नंतर भाजक मका शकाचें चिन्ह बदल करावें. ह्मणजे धनअसल्यास ऋण आणि ऋ णअसल्यास धन करावें. मग दोन्ही मकाशकांचीं चिन्हें सरूप अ सल्यास मिळवणी आणि विरूप असल्यास वजाबाकी करून त्या वजाबाकीस अधिक मकाशकाचें चिन्ह जोडावें.

उदाहरणें.

(१) ·०८२१४हे भाज्य ·०७४८९या भाजकांनीं भाग. | (२) २७·१०५९ हे भाज्य ५२२·७६या भाजकांनीं भाग.

संख्या. लाग्र. | उत्तर, ·७०८४

भाज्य ·०६३१४ = -२·८००३०
भाजक· ··७२४१ = -२·०५९८०
भागाका० ८·७११६ = ०·९४०५०

लाग्रतंमानें त्रैराशिक करण्याची रीति.

पूर्णांकाचे रीती प्रमाणें त्रैराशिक मांडून त्यांत जी गुण्यगुणक पदें होतील, त्यांचे लाग्रतंमाची बेरीज करून त्यांतून भाजकाचे लाग्रतंम वजा करावें. तें इच्छाफलाचें लाग्रतंम होईल. त्यापासून संख्या काढावी तें इच्छाफळ होईल.

उदाहरणें.

(१) ३४ ग्यालन दारूची किंमत १०० पौंड आहे, तर ५७५ ग्यालन दारूची किंमत किती होईल?

ग्यालन ३४ यास जर, याचें ला० १·५३१४८ हें बेरजेंतून वजा.
ग्यालन ५७५ तर, याचें ला० २·७५९६७ } यांची बेरीज.
पौंड १०० यांस, याचें ला० २·००००० }
पौंड १६९१·१७६४ इ० याचें ला० ३·२२८१९ बाकी.

(२) भुजज्या २२ : भु० ६५ :: बाजू ३०० : किती?

उत्तर, ५१२·००८२५.

लाग्रतंमानें वर्गादिक करायाचें.

जा संख्येचें वर्गादि करावयाचें त्या संख्येचें लाग्रतंम सांगितले वर्गादि प्रकाराकानें गुणावें, तो गुणाकार सांगितले वर्गादिकांचें लाग्रतंम झालें, नंतर त्या पासून संख्या काढावी ती वर्गादि होईल.

लाग्रतंम प्रकाशक ऋण आणि घात प्रकाशक धन आहे, ते
व्हां गुणाकारांत दशांशाचे शेवटीं हातचा येईल, तो धन या
ज करितां तो ऋण प्रकाशकाचे गुणाकारांत वजा करावा.

उदाहरणें.

(१) ३·०७१४६ याचा घनकर.
लाॅ॰
संख्या ३·०७१४६ = ०·४८७३४
घनप्रका॰ ३

धन २८·९७५८ = १·४६२०२ लाॅ॰

(२) ·०२६५ याचा $\frac{३}{२}$ घातकर.
उत्तर, ·००४३१

लाग्रतंमानें वर्गादि मूळ काढायाचें.

सांगितले संख्येचें लाग्रतंम मूळ प्रकाशकानें भागावें. भागा
कार मूळाचें लाग्रतंम होईल. त्यापासून संख्या काढावी, तें मूळ.

जेव्हां लाग्रतंम प्रकाशक ऋण आहे आणि तो भाजकानें निः
शेष भागत नाहीं, तेव्हां जितके अंकांनी वाढविला असतां निः
शेष भागेल तितके अंकांनी वाढवून भागावा, नंतर वाढविले
अंक तितके दशांशाचे पूर्वी+ घेऊन त्यास भाजकानें भागावें.

+ कोणत्याही पदास कोणत्याही संख्येनें गुणिलें आणि तिणेंच भागिलें तर,
त्या पदाचे किंमतींत कांहीं बदल होत नाहीं हें उघड आहे. याजकरितां ऋण ला
ग्रतंम प्रकाशकास सांगितले घातमूळ प्रकाशकानें भागिलां भाग बराबर आ
त नाहीं तर भाग लागण्यास जितक्यांनी कमी आहे तितका प्रकाशक होण्यास
योग्य अशा संख्येनें लाग्रतंमाचे संख्येस गुणावें आणि भागावें जसें - ३·५७१७८
या लाग्रतंमास पांच यांणी भागणें आहे आणि -३ यास पांचानी भाग बराबर
आत नाहीं. कारण प्रकाशक ऋण असून दशांश धन आहेत. याजकरितां ला
ग्रतंम पदाचे मूळ संख्येस $\frac{१००}{१००} = \frac{१०^२}{१०^२} = १०^२ \times १०^{-२}$ यांणी गुणिलें, अथवा
मूळ पदाचें लाग्रतंमांत ह्मणजे - ३·५७१७८ यांत या पदाचें लाग्र-
तंम मिळविलें असतां, असें होईल. -५+२·५७१७८ यांत -५ प्रकाशकास
पांचांनीं भाग बराबर जाईल.

उदाहरणें.

(१) १२३४५ यांचें घनमूळ काढ.

आप्र०
घन संख्या १२३४५ ३) ५०९१४१

हें घनमूळ. २३·१११६···१·३६३०२

(२) ·०५६५२ यांचें पंच घातमूळ काढ.

उत्तर, ·५६२११

(३) $\frac{३}{११}$ यांचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ·६४८५

पुढील कोष्टकांतील अंक हेलाग्रतंमीक दशांश आहेत.

संख्या १—३४ आणि १०० — ३४० पर्यंत

अंक ००००० — ५३१४८ पर्यंत

संख्यांचे लाग्रतंम कोष्टक.

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१	०००००	०००००	३०१०३	४७७१२	६०२०६	६९८९७	७७८१५	८४५१०	९०३०९	९५४२४
१०	०००००	००४३२	००८६०	०१२८४	०१७०३	०२११९	०२५३१	०२९३८	०३३४२	०३७४३
११	०४१३९	०४५३२	०४९२२	०५३०८	०५६९०	०६०७०	०६४४६	०६८१९	०७१८८	०७५५५
१२	०७९१८	०८२७९	०८६३६	०८९९१	०९३४२	०९६९१	१००३७	१०३८०	१०७२१	११०५९
१३	११३९४	११७२७	१२०५७	१२३८५	१२७१०	१३०३३	१३३५४	१३६७२	१३९८८	१४३०१
१४	१४६१३	१४९२२	१५२२९	१५५३४	१५८३६	१६१३७	१६४३५	१६७३२	१७०२६	१७३१९
१५	१७६०९	१७८९८	१८१८४	१८४६९	१८७५२	१९०३३	१९३१२	१९५९०	१९८६६	२०१४०
१६	२०४१२	२०६८३	२०९५२	२१२१९	२१४८४	२१७४८	२२०११	२२२७२	२२५३१	२२७८९
१७	२३०४५	२३३००	२३५५३	२३८०५	२४०५५	२४३०४	२४५५१	२४७९७	२५०४२	२५२८५
१८	२५५२७	२५७६८	२६००७	२६२४५	२६४८२	२६७१७	२६९५१	२७१८४	२७४१६	२७६४६
१९	२७८७५	२८१०३	२८३३०	२८५५६	२८७८०	२९००३	२९२२६	२९४४७	२९६६७	२९८८५
२०	३०१०३	३०३२०	३०५३५	३०७५०	३०९६३	३११७५	३१३८७	३१५९७	३१८०६	३२०१५
२१	३२२२२	३२४२८	३२६३४	३२८३८	३३०४१	३३२४४	३३४४५	३३६४६	३३८४६	३४०४४
२२	३४२४२	३४४३९	३४६३५	३४८३०	३५०२५	३५२१८	३५४११	३५६०३	३५७९३	३५९८४
२३	३६१७३	३६३६१	३६५४९	३६७३६	३६९२२	३७१०७	३७२९१	३७४७५	३७६५८	३७८४०
२४	३८०२१	३८२०२	३८३८२	३८५६१	३८७३९	३८९१७	३९०९४	३९२७०	३९४४५	३९६२०
२५	३९७९४	३९९६७	४०१४०	४०३१२	४०४८३	४०६५४	४०८२४	४०९९३	४११६२	४१३३०
२६	४१४९७	४१६६४	४१८३०	४१९९६	४२१६०	४२३२५	४२४८८	४२६५१	४२८१३	४२९७५
२७	४३१३६	४३२९७	४३४५७	४३६१६	४३७७५	४३९३३	४४०९१	४४२४८	४४४०४	४४५६०
२८	४४७१६	४४८७१	४५०२५	४५१७९	४५३३२	४५४८४	४५६३७	४५७८८	४५९३९	४६०९०
२९	४६२४०	४६३८९	४६५३८	४६६८७	४६८३५	४६९८२	४७१२९	४७२७६	४७४२२	४७५६७
३०	४७७१२	४७८५७	४८००१	४८१४४	४८२८७	४८४३०	४८५७२	४८७१४	४८८५५	४८९९६
३१	४९१३६	४९२७६	४९४१५	४९५५४	४९६९३	४९८३१	४९९६९	५०१०६	५०२४३	५०३७९
३२	५०५१५	५०६५१	५०७८६	५०९२०	५१०५५	५११८८	५१३२२	५१४५५	५१५८७	५१७२०
३३	५१८५१	५१९८३	५२११४	५२२४४	५२३७५	५२५०४	५२६३४	५२७६३	५२८९२	५३०२०

संख्यांचे लाघतंमकोष्टक.

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
३४	५३१४८	५३२७५	५३४०३	५३५२९	५३६५६	५३७८२	५३९०८	५४०३३	५४१५८	५४२८३
३५	५४४०७	५४५३१	५४६५४	५४७७७	५४९००	५५०२३	५५१४५	५५२६७	५५३८८	५५५०९
३६	५५६३०	५५७५१	५५८७१	५५९९१	५६११०	५६२२९	५६३४८	५६४६७	५६५८५	५६७०३
३७	५६८२०	५६९३७	५७०५४	५७१७१	५७२८७	५७४०३	५७५१९	५७६३४	५७७४९	५७८६४
३८	५७९७८	५८०९२	५८२०६	५८३२०	५८४३३	५८५४६	५८६५९	५८७७१	५८८८३	५८९९५
३९	५९१०६	५९२१८	५९३२९	५९४३९	५९५५०	५९६६०	५९७७०	५९८७९	५९९८८	६००९७
४०	६०२०६	६०३१४	६०४२३	६०५३१	६०६३८	६०७४६	६०८५३	६०९५९	६१०६६	६११७२
४१	६१२७८	६१३८४	६१४९०	६१५९५	६१७००	६१८०५	६१९०९	६२०१४	६२११८	६२२२१
४२	६२३२५	६२४२८	६२५३१	६२६३४	६२७३७	६२८३९	६२९४१	६३०४३	६३१४४	६३२४६
४३	६३३४७	६३४४८	६३५४८	६३६४९	६३७४९	६३८४९	६३९४९	६४०४८	६४१४७	६४२४६
४४	६४३४५	६४४४४	६४५४२	६४६४०	६४७३८	६४८३६	६४९३३	६५०३१	६५१२८	६५२२५
४५	६५३२१	६५४१८	६५५१४	६५६१०	६५७०६	६५८०१	६५८९६	६५९९२	६६०८७	६६१८१
४६	६६२७६	६६३७०	६६४६४	६६५५८	६६६५२	६६७४५	६६८३९	६६९३२	६७०२५	६७११७
४७	६७२१०	६७३०२	६७३९४	६७४८६	६७५७८	६७६६९	६७७६१	६७८५२	६७९४३	६८०३४
४८	६८१२४	६८२१५	६८३०५	६८३९५	६८४८५	६८५७४	६८६६४	६८७५३	६८८४२	६८९३१
४९	६९०२०	६९१०८	६९१९७	६९२८५	६९३७३	६९४६१	६९५४८	६९६३६	६९७२३	६९८१०
५०	६९८९७	६९९८४	७००७०	७०१५७	७०२४३	७०३२९	७०४१५	७०५०१	७०५८६	७०६७२
५१	७०७५७	७०८४२	७०९२७	७१०१२	७१०९६	७११८१	७१२६५	७१३४९	७१४३३	७१५१७
५२	७१६००	७१६८४	७१७६७	७१८५०	७१९३३	७२०१६	७२०९९	७२१८१	७२२६३	७२३४६
५३	७२४२८	७२५०९	७२५९१	७२६७३	७२७५४	७२८३५	७२९१६	७२९९७	७३०७८	७३१५९
५४	७३२३९	७३३२०	७३४००	७३४८०	७३५६०	७३६४०	७३७१९	७३७९९	७३८७८	७३९५७
५५	७४०३६	७४११५	७४१९४	७४२७३	७४३५१	७४४२९	७४५०७	७४५८६	७४६६३	७४७४१
५६	७४८१९	७४८९६	७४९७४	७५०५१	७५१२८	७५२०५	७५२८२	७५३५८	७५४३५	७५५११
५७	७५५८७	७५६६४	७५७४०	७५८१५	७५८९१	७५९६७	७६०४२	७६११८	७६१९३	७६२६८
५८	७६३४३	७६४१८	७६४९२	७६५६७	७६६४१	७६७१६	७६७९०	७६८६४	७६९३८	७७०१२

संख्यांचे लायतंम कोष्टक.

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
५९	७७०८५	७७१५९	७७२३२	७७३०५	७७३७९	७७४५२	७७५२५	७७५९७	७७६७०	७७७४३
६०	७७८१५	७७८८७	७७९६०	७८०३२	७८१०४	७८१७६	७८२४७	७८३१९	७८३९०	७८४६२
६१	७८५३३	७८६०४	७८६७५	७८७४६	७८८१७	७८८८८	७८९५८	७९०२९	७९०९९	७९१६९
६२	७९२३९	७९३०९	७९३७९	७९४४९	७९५१८	७९५८८	७९६५७	७९७२७	७९७९६	७९८६५
६३	७९९३४	८०००३	८००७२	८०१४०	८०२०९	८०२७७	८०३४६	८०४१४	८०४८२	८०५५०
६४	८०६१८	८०६८६	८०७५४	८०८२१	८०८८९	८०९५६	८१०२३	८१०९०	८११५८	८१२२४
६५	८१२९१	८१३५८	८१४२५	८१४९१	८१५५८	८१६२४	८१६९०	८१७५७	८१८२३	८१८८९
६६	८१९५४	८२०२०	८२०८६	८२१५१	८२२१७	८२२८२	८२३४७	८२४१३	८२४७८	८२५४३
६७	८२६०७	८२६७२	८२७३७	८२८०२	८२८६६	८२९३०	८२९९५	८३०५९	८३१२३	८३१८७
६८	८३२५१	८३३१५	८३३७८	८३४४२	८३५०५	८३५६९	८३६३२	८३६९६	८३७५९	८३८२२
६९	८३८८५	८३९४८	८४०११	८४०७३	८४१३६	८४१९८	८४२६१	८४३२३	८४३८६	८४४४८
७०	८४५१०	८४५७२	८४६३४	८४६९५	८४७५७	८४८१९	८४८८०	८४९४२	८५००३	८५०६५
७१	८५१२६	८५१८७	८५२४८	८५३०९	८५३७०	८५४३१	८५४९१	८५५५२	८५६१२	८५६७३
७२	८५७३३	८५७९४	८५८५४	८५९१४	८५९७४	८६०३४	८६०९४	८६१५३	८६२१३	८६२७२
७३	८६३३२	८६३९२	८६४५१	८६५१०	८६५७०	८६६२९	८६६८८	८६७४७	८६८०६	८६८६४
७४	८६९२३	८६९८२	८७०४०	८७०९९	८७१५७	८७२१६	८७२७४	८७३३२	८७३९०	८७४४८
७५	८७५०६	८७५६४	८७६२२	८७६७९	८७७३७	८७७९५	८७८५२	८७९१०	८७९६७	८८०२४
७६	८८०८१	८८१३८	८८१९५	८८२५२	८८३०९	८८३६६	८८४२३	८८४८०	८८५३६	८८५९३
७७	८८६४९	८८७०५	८८७६२	८८८१८	८८८७४	८८९३०	८८९८६	८९०४२	८९०९८	८९१५४
७८	८९२०९	८९२६५	८९३२१	८९३७६	८९४३२	८९४८७	८९५४२	८९५९७	८९६५३	८९७०८
७९	८९७६३	८९८१८	८९८७३	८९९२७	८९९८२	९००३७	९००९१	९०१४६	९०२००	९०२५५
८०	९०३०९	९०३६३	९०४१७	९०४७२	९०५२६	९०५८०	९०६३४	९०६८७	९०७४१	९०७९५
८१	९०८४९	९०९०२	९०९५६	९१००९	९१०६२	९१११६	९११६९	९१२२२	९१२७५	९१३२८
८२	९१३८१	९१४३४	९१४८७	९१५४०	९१५९३	९१६४५	९१६९८	९१७५१	९१८०३	९१८५५
८३	९१९०८	९१९६०	९२०१२	९२०६५	९२११७	९२१६९	९२२२१	९२२७३	९२३२४	९२३७६
८४	९२४२८	९२४८०	९२५३१	९२५८३	९२६३४	९२६८६	९२७३७	९२७८८	९२८४०	९२८९१

संख्या ८५—१०० आणि ८५०—१००० पर्यंत — लाग्रतंम ९२९४२— १०००० पर्यंत.

संख्यांचे लाग्रतंम कोष्टक.

संख्या	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
८५	९२९४२	९२९९३	९३०४४	९३०९५	९३१४६	९३१९७	९३२४७	९३२९८	९३३४९	९३३९९
८६	९३४५०	९३५००	९३५५१	९३६०१	९३६५१	९३७०२	९३७५२	९३८०२	९३८५२	९३९०
८७	९३९५२	९४००२	९४०५२	९४१०१	९४१५१	९४२०१	९४२५०	९४३००	९४३४९	९४३९
८८	९४४४८	९४४९८	९४५४७	९४५९६	९४६४५	९४६९४	९४७४३	९४७९२	९४८४१	९४८९
८९	९४९३९	९४९८८	९५०३६	९५०८५	९५१३४	९५१८२	९५२३१	९५२७९	९५३२८	९५३७
९०	९५४२४	९५४७२	९५५२१	९५५६९	९५६१७	९५६६५	९५७१३	९५७६१	९५८०९	९५८५
९१	९५९०४	९५९५२	९५९९९	९६०४७	९६०९५	९६१४२	९६१९०	९६२३७	९६२८४	९६३३
९२	९६३७९	९६४२६	९६४७३	९६५२०	९६५६७	९६६१४	९६६६१	९६७०८	९६७५५	९६८०
९३	९६८४८	९६८९५	९६९४२	९६९८८	९७०३५	९७०८१	९७१२८	९७१७४	९७२२०	९७२६
९४	९७३१३	९७३५९	९७४०५	९७४५१	९७४९७	९७५४३	९७५८९	९७६३५	९७६८१	९७७२
९५	९७७७२	९७८१८	९७८६४	९७९०९	९७९५५	९८०००	९८०४६	९८०९१	९८१३७	९८१८
९६	९८२२७	९८२७२	९८३१८	९८३६३	९८४०८	९८४५३	९८४९८	९८५४३	९८५८८	९८६३
९७	९८६७७	९८७२२	९८७६७	९८८११	९८८५६	९८९००	९८९४५	९८९८९	९९०३४	९९०७
९८	९९१२३	९९१६७	९९२११	९९२५५	९९३००	९९३४४	९९३८८	९९४३२	९९४७६	९९५२
९९	९९५६४	९९६०७	९९६५१	९९६९५	९९७३९	९९७८२	९९८२६	९९८७०	९९९१३	९९९५

गणितसार.

भागपांचवा.

रेखागणिताचीं मूलतत्वें.

सांकेतिकअक्षरेंवचिन्हें.

अक्षरें	अर्थ	चिन्हें	अर्थ
अ॰	अथवा.	=	बराबर.
आ॰	आकृति.	∴	ह्मणून.
इ॰	इत्यादि.	∵	याजकरितां.
का॰	काटकोन.	∠	कोन.
का॰चौ॰	काटकोनचौकोन.	△	त्रिकोण.
किं॰	किंवा.	△न,△चा	त्रिकोणांत,त्रिकोणाचा इ॰
चौ॰	चौकोन.	▭	चौकोन.
त्रि॰	त्रिकोण.	⬠	पंचकोण.
स॰	समांतर.	⊙	वर्तुळ.
स॰चौ॰	समांतरबाजूचौकोन.	>*	पेक्षां मोठें.
स॰आ॰	सरूपाकृति.	<	पेक्षां लहान.

व्याख्या.

१ जास स्थिति मात्र आहे, परिमाण नाहीं, त्यास बिंदू ह्मणावें. (·)

२ जीस लांबी मात्र आहे, रुंदी आणि जाडी नाहीं, तीस रेघ अ —— ब ह्मणावें.

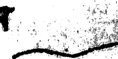
* > याचिन्हाचे अग्रांतील पद बाहेरील पदापेक्षां मोठें समजावयाचें.

रेघेचा दोहों टोकां जवळ एक एक अक्षर लिहून त्या अक्षरांनीं या रेघ उच्चारितात. असें अव रेघ अनेक बिंदू एकाशीं एक संलग्न झाल्यानें रेघ उत्पन्न होते.

३ दोन बिंदू मधील अति थोडें अंतर मापणाऱ्या रेघेस सरळ रेघ ह्मणावें.



४ जी रेघ आद्यंत बिंदूवर सरळ न जातां दिशा बदलून गेली तीस वांकडी रेघ ह्मणावें.



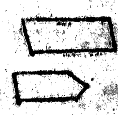
५ जी रेघ कांहीं सरळ व कांहीं वांकडी आहे तीस मिश्र रेघ ह्मणावें.



६ ज्या रेघांत बराबर अंतर रहातें कधीं कितीही वाढविल्या तरी एकत्र मिळत नाहींत, त्यांस समांतर रेघा ह्मणावें.

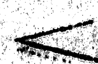


७ जीस लांबी व रुंदी आहे, तीस पातळी ह्मणावें. पातळीची मर्यादा रेघ आहे.



८ ज्या पातळीवर कोठेंही दोन बिंदू घेतले असतां त्यांचा मधील सरळ रेघ सर्वांशीं पातळींत असते, त्या पातळीस सरळ पातळी ह्मणावें.

९ दोन दिशांस गेलेल्या दोन रेघांचीं टोकें एकत्र मिळतात, त्या बिंदूस कोन ह्मणावें.



कोनस्थळींचें अक्षर मध्यें घेऊन तीन अक्षरांनीं कोन उच्चारितात. एक बिंदुस्थळीं एकच कोन असल्यास तो एक अक्षरानें उच्चारितात.



१० एक रेघ दुसरे रेघेवर उभी असून तिचे दोन बाजूंस

जे दोन कोन पडतात, ते बराबर असतील तर त्यांस प्रत्ये कीं काट॰ ह्मणावें. आणि काट॰ करणारी जी उभी रेघ तिला लंब ह्मणावें.



११ एक रेघ दुसरे रेघेवर मिळून तिचे एके अंगास जे दोन कोन पडतात त्यांस परस्परांचे परस्पर पूरक कोन (सप्लिमें) ह्मणावें.



कोणताही कोन आणि काट कोन यांचा मधील अंतरा च्या जो कोन त्यास भरतीचा कोन (काम्प्लिमेंट) ह्मणावें.



१२ जो कोन बराबर काट कोन नव्हे त्यास तिर्कस कोन ह्मणावें.

१३ जो तिर्कस कोन काट कोनाहून मोठा आहे, त्यास विशाळ कोन ह्मणावें.



१४ जो तिर्कस कोन काट कोनाहून लहान आहे, त्यास लघु कोन ह्मणावें.

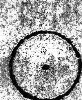


१५ ज्याचे भोंवती मर्यादेच्या रेघा आहेत त्यास आकृति असें ह्मणावें. कोणत्याही एका आकृति मध्यें जो अवकाश असतो त्यास क्षेत्र ह्मणावें. आणि त्याचें जें माप त्यास क्षेत्र फळ ह्मणावें.





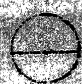
१६ जी आकृति एका वांकड्या रेघेनें वेष्टित असते व ज्यामध्यें असा एक बिंदू असतो कीं, ज्यापासून त्या वांकडे रेघे पर्यंत अंतर सर्वत्र सारखें असतें, त्या आकृतीस वर्तुळ असें ह्मणावें. व त्या वेष्टणाऱ्या रेघेस वर्तुळ परिघ व त्या विशेष बिंदूस वर्तुळ मध्य ह्मणावें.



१७ वर्तुळ मध्यापासून परिघा पर्यंत जें अंतर त्या रेघेस त्रिज्या ह्मणावें.

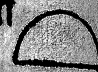


१८ जी रेघ वर्तुळ मध्यांतून जाऊन परिघास दोहींकडे



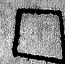
मिळते त्या रेषेस वर्तुळाचा व्यास ह्मणावें.

१९ वर्तुळाचा व्यास वर्तुळाचे बराबर दोन भाग करितो त्या प्रत्येक भागास अर्धवर्तुळ अथवा वर्तुळखंड ह्मणावें.

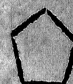


२० ज्या आकृतीच्या मर्यादा सरळ रेषा आहेत, तीस सरळ रेषाकृति ह्मणावें. आणि त्यांस बाजूंचे संख्ये प्रमाणें नावें होतात. जसें त्रिकोण, चौकोन इत्यादि.





२१ ज्या आकृतीस चौहोंपेक्षां अधिक बाजू आहेत, तीस बहुकोनाकृति ह्मणावें.



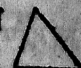
२२ ज्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू सम असतात त्यास समबाजू (समभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२३ ज्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू बराबर असतात त्यास समद्विबाजू (समद्विभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२४ ज्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू बराबर नाहींत, त्यास विषमबाजू (विषमभुज) त्रिकोण ह्मणावें.



२५ ज्या त्रिकोणाचा एक कोन काटकोन आहे त्यास का० त्रिकोण ह्मणावें. का० त्रिकोणाच्या काटकोनासमोरच्या बाजूस कर्ण आणि दुसऱ्या दोन बाजूंतून एकीस भुज व एकीस कोटी ह्मणावें.



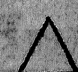
२६ ज्या त्रिकोणाचा एक कोन विशाळ असतो, त्यास विशाळकोन त्रिकोण ह्मणावें.



२७ ज्या त्रिकोणाचे तीनही कोन लघु असतात, त्यास लघुकोन त्रिकोण ह्मणावें.



२८ कोणत्याही आकृतीचे सर्व कोन सम असल्यास तीस समकोनाकृति ह्मणावें. आणि सर्व बाजू बराबर असल्या-



सतीस सम भुजाकृति ह्मणावें.

२९ एका आकृतीचे सर्व कोन दुसऱ्या आकृतीचे सर्व को नाबरोबर असल्यास त्या दोन आकृतींस परस्पर समको नाकृति ह्मणावें. आणि जा दोन आकृतींचा सर्व बाजू बरोबर असता त त्या दोन आकृतींस परस्पर सम भुजाकृति ह्मणावें.



३० जा आकृतीस चार बाजू आणि चार कोन आहेत तीस चौबाजू अथवा चौकोन ह्मणावें.



३१ जा चौकोनांत समोरा समोरच्या बाजू परस्पर समां॰ आहेत त्यास स॰ चौ॰ ह्मणावें.

३२ जा स॰ चौ॰चे चारही कोन का॰ आहेत त्यास का॰ चौ॰ ह्मणावें.



३३ का॰ चौ॰च्या चार ही बाजू बराबर असल्यास त्यास चौरस ह्मणावें.



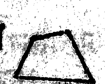
३४ जा स॰ चौ॰च्या चारही बाजू बराबर लांबीच्या असून कोन तिर्कस आहेत त्यास रांबायद ह्मणावें.



३५ जा स॰ चौ॰त बाजूंच्या एक एक जोड परस्पर बराबर आहे, त्यास रांबायद ह्मणावें.



३६ जा चौकोनांत बाजूंचा एकही जोड समां॰ नाहीं त्यास त्रापिज्यम् ह्मणावें.



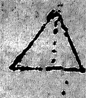
३७ जा चौकोनांत बाजूंचा एक जोड समां॰ आहे त्यांस त्रापिजैद ह्मणावें.



३८ जी रेघ चौ॰चे समोरा समोरचे दोन कोन सांधिते तीस कर्ण रेघ ह्मणावें.



३९ कोणतेही आकृतीचे खालचे बाजूस पाया ह्मणावें आणि बाकी बाजूंस बाजू ह्मणावें. आणि पायावर शिरो बिंदूपासून केले-ले लंबास उंची ह्मणावें.



४० जा बिंदूमध्यें रेघेचा छेद होतो त्यास छेदन बिंदू ह्मणावें.



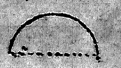
४१ रेघेचे छेदन बिंदूपासून तिचे टोंका पर्यंत जीं अंतरें त्यांस तिचे-खंड ह्मणावें.

४२ जा रेघेचे असे दोन खंड होतात कीं, सर्व रेघ व एक खंड यांचा का॰ चौ॰ दुसऱ्या खंडाचे वर्गा बरोबर होतो, त्या रेघेचें छेदन मध्यम भागांत झालें असें ह्मणावें.

४३ वर्तुळाचे परिघाचा जो तुकडा त्यास कौंस ह्मणावें.



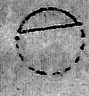
४४ अर्धव॰ कौंसास परिघार्ध ह्मणावें.



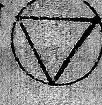
४५ जी रेघ कौंसाची दोन टोंकें सांधिते तीस त्या कौंसाची ज्या ह्मणावें.



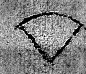
४६ एक वर्तुळाचा तुकडा आहे, ज्यास मर्यादा एक कौंस व एक ज्या आहे, त्यास वर्तुळखंड ह्मणावें.



४७ कौंसामध्यें एक बिंदू घेऊन त्यापासून कौंसाचा टोंकांस सांधणाऱ्या रेघेचा टोंका पर्यंत दोन रेघा केल्या असतां जो कोन होतो, त्यास वर्तुळखंडांतील कोन असें ह्मणावें. आणि कौंसासमोर जो कोन असतो, त्यास कौंसावरील कोन ह्मणावें.



४८ वर्तुळाचा एक तुकडा आहे, ज्यास मर्यादा दोन व्यासदळें व एक कौंस आहे, त्यास सेकटोर असें ह्मणावें.



४९ वर्तुळाचा ज्या खंडांत समान कोन असतात, त्यांस सजातिय वर्तुळखंड असें ह्मणावें.



५० ज्या कौसा समोर समान मध्यकोन असतात त्यांस सजातिय कौंस असें ह्मणावें.

५१ ज्या सेकतोरांतील कौंस सजातिय असतात त्यांस सजातिय सेकतोर ह्मणावें.



५२ ज्या वर्तुळाच्या त्रिज्या समान असतात त्यांस समान वर्तुळें ह्मणावें,



५३ जी रेघ वर्तुळास मिळते आणि वाढविली असतां त्यास कापीत नाहीं; त्या रेघेस वर्तुळाची स्पर्श रेघ ह्मणावें.



५४ जीं वर्तुळें परस्पर मिळतात, परंतु कापीत नाहींत, त्यांस स्पर्श वर्तुळें ह्मणावें.



५५ वर्तुळाबाहेरचे एका बिंदूपासून एक रेघ केली ती त्या वर्तुळास दोन स्थळीं मिळते, त्या रेघेस छेदन रेघ ह्मणावें.



५६ महत्व लक्षून दोन सरूप संख्यांचा जो परस्पर संबंध त्यास गुणोत्तर ह्मणावें. अ : ब अथवा अ/ब असें लिहितात.

५७ गुणोत्तराचे प्रथम पदास अग्रसर आणि दुसरे पदास उपाग्रसर ह्मणावें.

५८ ज्या मोठे पदांत लहान पद कांहीं वेळ बरोबर जातें, त्या मोठे पदास लहान पदाचें व्यापक ह्मणावें. आणि लहान पदास मोठे पदाचें व्याप्य ह्मणावें.

५९ ज्या व्यापकांतून पदें सारखे वेळ आलात त्या व्यापकांस त्याप दोन्हीं समव्यापकें ह्मणावीं.

६० चार पदें आहेत. त्यांत प्रथम आणि तिसरें यांचीं पाहिजेत तीं समव्यापकें घेतलीं, तसेंच दुसरें आणि चवथें यांचीं पाहिजेत-

तीं समव्यापकें घेतलीं, आणि पहिले पदाचें व्यापक दुसरे पदाचे व्यापकापेक्षां मोठें, बराबर अथवा लहान असेल; तसेंच तिसरे पदाचें व्यापक चवथे पदाचे व्यापकापेक्षां अनुक्रमें मोठें, बराबर, अथ॰ लहान असेल तर तीं चार पदें प्रमाणांत आहेत.

६१ जर चार पदांत पहिलें आणि दुसरें यांचें गुणोत्तर, तिसरें आणि चवथें यांचे गुणोत्तरा बराबर असेल तर तीं चार पदें प्रमाणांत होतील. आणि त्या प्रमाणास चतुःप्रमाण ह्मणावें.

६२ अ, ब, क, ड चार पदें प्रमाणांत असल्यास अः बःः कः ड या प्रमाणें लिहितात.

६३ सगळ्या रेघेस जर मोठा खंड तर मोठ्या खंडास लहान खंड या प्रमाणें एक रेघेचे दोन खंड पाडिले असतां, त्या रेघेचे अंत्यमध्य प्रमाणानें खंड पडले असें ह्मणावें.

६४ सगळ्या रेघेस जर एका टोंकाकडील खंड तर दुसरे टोंकाकडील खंडास मध्य खंड. या प्रमाणें एका रेघेचे तीन खंड पाडिले असतां त्या रेघेचे गायन प्रमाणानें खंड पडले असें ह्मणावें.

६५ पहिल्या रेघेस जर तिसरी रेघ तर पहिली आणि दुसरी यांची वजाबाकीस दुसरी आणि तिसरी यांची वजाबाकी. या प्रमाणें तीन रेघा असल्या तर त्या गायन प्रमाणांत आहेत असें समजावें.

६६ यावरील प्रमाणांत तीन रेघांपैकीं मधल्या रेघेस गायन मध्य रेघ ह्मणावें.

६७ एका बिंदूपासून चार रेघा निघून त्यांणीं एका रेघेस गायन प्रमाणानें छेदिलें असतां त्या रेघांस गायन प्रमाण छेदक रेघा असें ह्मणावें.

६८ जा दोन आकृती मध्यें एका आकृतीचे कोन प्रत्येकीं दुसऱ्या आकृतीचे कोना बराबर असतात, व समान कोना जवळच्या बाजू प्रमाणांत असतात; त्या आकृतींस सरूपाकृति ह्मणावें.

६९ एका आकृतीचा दोन बाजू पैकीं एका बाजूस, जर दुसऱ्या आकृतीचा दोन बाजूं पैकीं एक; तर त्याच आकृतीचे दुसरे बाजूस, पहिले आकृतीची दुसरी बाजू; असें असल्यास त्या दोन आकृतींच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत असें ह्मणावें.

७० कोणत्येही आकृतीची परिमिती तीच होय. जी तिचे सर्व बाजूची मिळून बेरीज आहे.

७१ निश्चित तेंच होय. जें कांहीं करणें अथवा केल्याचा ताळा दाखविणें तें. निश्चित दोन प्रकारचें आहे, कृत्य आणि सिद्धांत.

७२ कृत्य तेंच होय. जें कांहीं करायास सांगितलें.

७३ सिद्धांत तोच होय. जो कांहीं केल्याचा ताळा.

७४ लिंम तेंच होय. जें कांहीं पूर्वीं सांगितलें किंवा सिद्ध केलें. पुढें येणारतें सुगम जाया साठीं

७५ कुरलरी तीच होय. जो पूर्वील प्रत्यय आला अथवा सिद्धांतापासून जो लाभ झाला.

७६ स्कोलम ह्मणजे टीप. पूर्वीं सांगितले पुरःकरणावर ह्मणजे त्या कृत्यावरील अवांतर विशेष.

प्रत्यक्ष प्रमाणें.

१ जा वस्तू दुसरे एके वस्तूचीं प्रत्येक सम ह्मणजे बरोबर आहेत तर त्या सर्व वस्तू परस्पर बरोबर आहेत.

२ समांस सम मिळविलेसर बेरीज सम होते.

३ समांतून सम वजा केलेतर सम बाकी रहातात.

४ समांत विषम मिळविलेतर बेरीज विषम येते.

५ विषमांतून सम वजा केलेतर विषम बाकी रहातात.

६ जा वस्तू असेकीं दुसरे एके वस्तूचे दुप्पट आहेत, त्या सर्व परस्पर बराबर आहेत.

७ जा वस्तू असेकीं दुसरे एके वस्तूचे अर्धा बरोबर आहेत, त्या सर्व बराबर आहेत.

८ जा वस्तू सर्वांशीं परस्पर मिळतात अथवा सारिखी जागा भरतात त्या एकरूप आहेत.

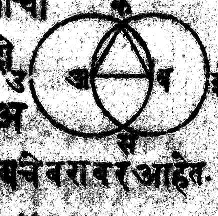
९ कोणती ही वस्तू तिचे सर्व तुकड्यांचे बेरजे बराबर आहे.

१० सर्व काटकोन परस्पर बराबर असतात.

११ एकच बिंदूतून एकेच रेघेशीं दोन समांतर रेघा काढिल्या असतां त्या परस्परांशीं मिळतील. ह्मणजे एकेच ठिकाणीं पडतील. निराळ्या रहाणार नाहींत.

बूक पहिलें.

प्रथम सिद्धांत. हट्टनचें कृत्य १.

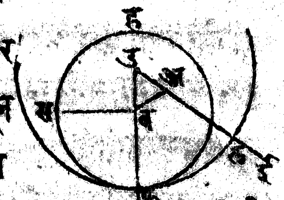


अब दिलेले रेघेवर समबाजू त्रिकोण करावयाचा अब त्रिज्येनें अ आणि ब वर्तुळ मध्य जाणून दोन वर्तुळें कर आणि त्यांचे क छेदन बिंदूपासून अक, बक सांध. आतां अक, बक रेघा असेकीं अबचे बराबर आहेत. कारण त्रिज्या आहेत :. अबक हा समबाजू △ होय हें सिद्ध.

दुसरासिद्धांत.

सांगितल्या बिंदूपासून सांगितल्या रेघे एवढी रेघ काढावयाची.

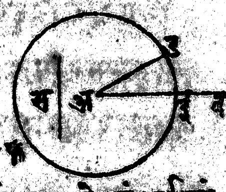
अ बिंदूपासून अब एवढी रेघ काढावयाची.



अ, ब बिंदू सांध आणि (१ सि॰ प्र॰) अबवर अबड समबाजू त्रि॰ कर. नंतर ब मध्य जाणून बस त्रिज्येनें एक वर्तुळ कर आणि बड रेघ व र्तुळास ग स्थळीं मिळेल अशी वाढीव. नंतर ड मध्य जाणून गड त्रिज्ये नें एक वर्तुळ कर आणि अड रेघ परिघास ल स्थळीं मिळे पर्यंत वा- ढीव. (१७ व्या॰ प्र॰) डल = डग आहे. यांत (३ प्र॰ प्र॰) अड = बड वजा करून बाकी अल = बग अ॰ बस ∴ अल = बस हें सिद्ध.

तिसरासिद्धांत

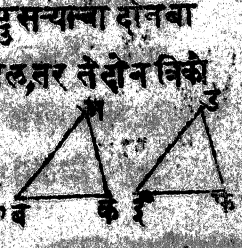
दिलेल्या दोन विषम रेघांपैकीं मोठीचा लहानी एवढा तुकडा पा डावयाचा.



स रेघे एवढा अब रेघेचा तुकडा पाडावयाचा. (२ सि॰ प्र॰) अ बिंदूपासून स एवढी अड रेघ का ढून अ मध्यस्थक करून अड त्रिज्येनें डईफ वर्तुळ कर. तेव्हां अई सां गितला खंड झाला. कारण अ बिंदू ⊙ मध्य आहे ∴ अई = अड अ॰ स हें सिद्ध.

चवथासिद्धांत. हा यूक्लिडचा पहिला.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू व अंतरकोन दुसऱ्याच्या दोन बा जू व अंतरकोन यांशीं अनुक्रमें बराबर असतील, तर ते दोन त्रिको ण एकरूप होतील.



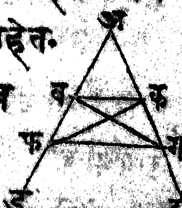
अबक आणि डईफ या दोन △न एकाचा अब,

अकयादोनबाजू वअअंतरकोनदुसऱ्याचाडई, डफयादोनबाजू वडअंतरकोन यांशी अनुक्रमें बराबर असतील,तर हे दोन△एकरूप होतील.

आतांअबक त्रि॰ डईफ त्रिकोणावर ठेविला असाकीं,अबिंदूड बिंदूवर पडेल.अब, डई वर पडेलअक, डफ वर पडेल. आणिअब = डईआहे ∵ ब बिंदूई बिंदूवर पडेलतसें च अक = डफ आहे ∵ कबिंदू फबिंदूवर पडेल∴बक, ईफवर पडेल,∴ हे दोन त्रिकोणएकरूप आहेत हेंसिद्ध.

पांचवासिद्धांत. हृ॰२

समद्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन बराबर आहेत व समबाजू वाढविल्या असतां बाहेरील कोन बराबर आहेत.



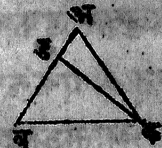
अबक △ त अक = अब असेलतर <क = <ब होईल. आणि बाजू वाढविल्या असतां <फबक = <गकबहोईल.

अक, अब, ई आणि ड पर्यंत वाढीव आणिबफ तुकडा कगतुकड्या बराबर घे आणि बग, फक सांध. आतांअबगआणिअफक हे△(४सिद्धा॰) एकरूप आहेत ∵ कफ = बग, <अफक <अगब आणि <अबग = <अकफआहे. आतां बकफ आणिकबगहे △(४सि॰) एकरूप आहेत ∵ <गबक = < फकब आणि<फबक = <बकग तेव्हां बाहेरील कोन बराबर हेंसिद्ध.

पुन: <अबग = <अकफयांतून <गबक = <फकबहे वजा करून, <अबक = <अकबआहे हें सिद्ध.

सहावासिद्धांत.

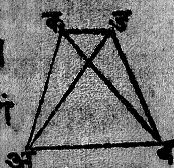
त्रिकोणांत दोन कोन बराबर असतील तर त्यांचा समोरील बाजू
बराबर होतील.



अबक△त <ब =<कअसेलतर अब=अकहोईल.
अब=अक नसेलतर अब >अकआहे, असें मा
नून(३सि॰म॰) अब च्या अकचे बराबरईबड तुकडा घे॰ कडसांध. ब
डक आणिअबक △त बड= अक, बक दोहोंस साधारण <ब
=<बकअनेत्र्हां (४सि॰म॰) हे △ एकरूप. परंतु लहान वस्तू मोठेव-
स्तू बराबर होणें परम अशक्य ∴अब=अकहें सिद्ध.
कुर॰ समकोण △ समभुज असतात.

सातवा सिद्धांत.

एके पायावर एके अंगास प्रत्येक टोंकांपासून दोन दोन बराबर रे
घांनीं दोन त्रिकोण होणार नाहींत.



अब रेषेच्या अआणि ब टोंका पासून एका अंगास
अक=अड आणि बक=बड अशा रेषा केल्या तरत्यां
पासून दोन त्रिकोण होणार नाहींत.

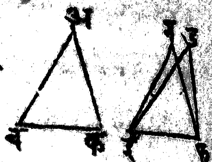
परंतु अबक आणिअबड हे दोन △ झाले असें मानून कड
सांध. तरअक=अड∴ (५सि॰म॰) <अकड= <अडकअसेंचबक=
बड ∴<बडक = <बकड यांत एकवेळ<कचा तुकडा<ड बराब
र आणि दुसऱ्यानें <ड चा तुकडा <क बराबर होतो हें अशक्य ∴
बराबर रेषांनीं एकाच अंगास दोन △ होत नाहींत हें सिद्ध.

आठवा सिद्धांत.

ह॰५

जर दोन त्रिकोणांत एकाच्या तीनबाजू दुसऱ्याच्या तीनबाजूब
राबर असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप होतील.

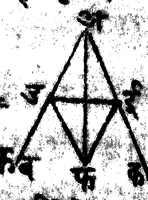
अबक आणि डईफ या दोन △ त अब = डई, अक = डफ आणि बक = ईफ असतील तर हे दोन △ एकरूप होतील.



आतां अबक त्रि॰ डईफ त्रि॰ वर ठेविला असा कीं बक बाजू ईफ बाजूवर पडेल व बिंदू ई बिंदूशीं आणिक बिंदू फ बिंदूशीं मिळेल. बक बाजू ईफ बाजूवर पडली ∴ अब, अक या अनुक्रमें डई, डफ वर पडतील. परंतु पडत नसल्यास आंत किंवा बाहेर पडतील. पण अशा पडोन (७सि॰म॰) △ होणार नाहींत, ∴ त्यावरच पडतील ∴ हे दोन △ एकरूप हें सिद्ध.

नववा सिद्धांत. ह॰ क्र॰ २

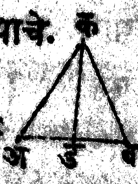
दिलेला अ कोन दुभागावयाचा.



अब रेषेंत ड बिंदू घेऊन (३सि॰म॰) अकचा अड = अई खंड कर. डई सांध. त्याच रेषेवर (१सि॰ डईफ समबाजू △ कर. अफ सांध. तेव्हां अफड आणि अफई हे दोन △ (८सि॰म॰) एकरूप आहेत ∴ ∠फअड = ∠फअई हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत. ह॰ क्र॰ १

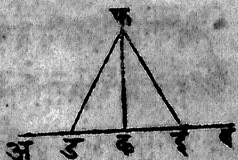
दिलेल्या अब सरळ रेषेचे दोन समान भाग करावयाचे.



अब रेषेवर (१सि॰म॰) अबक समबाजू त्रि॰ करून (९सि॰म॰) क कोन दुभागून ती रेषा अब स मिळे पर्यंत वाढीव. तेव्हां अडक आणि बडक हे दोन △ (४सि॰म॰) एकरूप ∴ अड = बड हें सिद्ध.

अकरावा सिद्धांत. ह॰ क्र॰ २

दिलेल्या सरळ रेषेवर त्यांतील एके बिंदूपासून लंब करावयाचा.

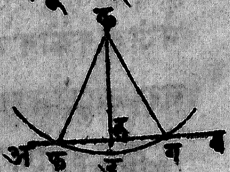


अबरेषेंत कबिंदू आहे, त्या ठिकाणीं लंब करावयाचा.

अबरेषेंत कोणताही ड बिंदू घे आणि कड =कई घे नंतर डई वर (१सि०प्र०) डफई समबाजू △ करून कफसांध. आतां ईफक आणि डफक हे दोन △ (८सि०प्र० एकरूप ∴ फस्थळावरील कोन परस्पर बराबर तेव्हां (१० व्या०प्र०) फकरेष लंब आहे हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत. ह० कु०४

एक रेष व तिच्याबर एक बिंदू दिला आहे. त्या बिंदूपासून दिले रेषेवर लंब करावयाचा.

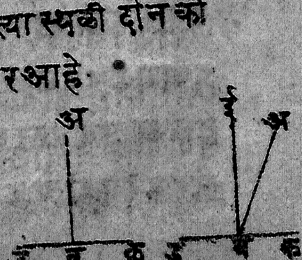


अब रेषेवर कबिंदूपासून लंब करावयाचा.

अब रेषेचे दुसरे अंगास ड बिंदू घेऊन कड त्रिज्येनें कमध्य जाणून फगकौंस कर फक आणि कग सांध. फग रेष (१० सि०प्र०) ह स्थळीं दुभागून हक सांध. आतां (८सि०प्र०) फहक आणि कहग हे △ एकरूप ∴ <कहफ= <कहग आहे) ∴ (१० व्या०प्र०) कह रेष लंब आहे हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत. ह० ६

एका सरळ रेषेवर दुसरी सरळ रेष मिळून त्या स्थळीं दोन कोन होतात, त्यांची बेरीज दोन का० कोनां बराबर आहे.



अब रेष कड रेषेवर मिळून <अबड आणि <अबक हे दोन कोन होतात ते बराबर असल्यास (१० व्या०प्र०) प्रत्येक का० आहेत.

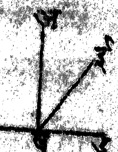
परंतु हे जर बराबर नाहींत तर ईब, कड रेषेवर लंब केला. तेव्हां

(१० व्या०प्र०) < ईबक = <ईबड आणि ते प्रत्येक का० आहेत. (१प्र० म०) <ईबक = <ईबअ + <अबक ∴ <ईबड + <ईबअ + <अबक = २का० यांत <ईबअ − <ईबअ = ० मिळवून (<ईबड + <ईबअ) + (<ईबअ + <अबक − <ईबअ) = २का० तेव्हां <अबक + <अबड = २काटकोन हें सिद्ध.

कु० पूरककोनाचे दोनजोडामध्यें एक कोन बराबर असेलतर बाकी राहिलेले कोन ही बराबर होतील.

चवदावासिद्धांत. इ० ६ कु० १

एका सरळरेषेस तिचा एका बिंदूंत दोहोंकडूनदोन सरळरेषा मिळून जे दोन कोन होतात, त्यांची बेरीज दोन काटकोना बरोबर असेल तर, त्या दोन सरळ रेषा मिळून सरळरेष होईल.



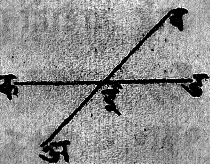
कब आणि बड या दोन रेषा अबरेषेंतील ब बिंदूस्थळीं एकत्र मिळून त्यापासून अबक आणि अबड हे दोन कोन होतात, ते दोन का० बराबर असतील तर कब आणि बड मिळून कबड सरळ रेष होईल.

आतां बक रेष जा सरळरेषेंत आहे, त्या रेषेंत बड नसेलतर बई रेष त्या सरळ रेषेंत आहे असें मान. तेव्हां (१३सि०प्र०) <अबक + <अबई = २का० परंतु वर सांगितल्या प्रमाणें <अबक + <अबड = २का० आहेत. यापासून <अबड = <अबई झाला तेव्हां तुकडा सर्व वस्तू बराबर होणें अशक्य ∴ कब, बड मिळून कबड सरळरेष होत्ये हें सिद्ध.

पंधरावासिद्धांत. इ० ७

दोन रेषा परस्परांस छेदितात तेव्हां समोरासमोरचे कोन बराब

र होतात.

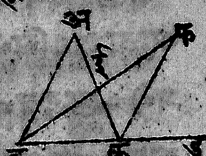
अब आणि कड या रेषा ई स्थळीं परस्पर छेदितात, 

तर < अईक = < बईड होईल.

अब वर कई रेघ मिळून (१३ सि॰म॰) < अईक + < कईब = २ का॰ तसेंच कड रेषेवर बई रेघ मिळून < बईक + < बईड = २ का॰ साधारण < बईक दोन ही पेट्यांतून काढून टाकिला असतां (२ म॰ म॰) <अईक = < बडई आहे हें सिद्ध.

सोळावा सिद्धांत. ह॰ ०

त्रिकोणाची एक बाजू बाहेर वाढविली असतां बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचे कोणते ही कोनाहून मोठा होतो.



अबक△ ची बक बाजू ड पर्यंत वाढविली असतां बाहेरील <अकड > <अ होईल.

अक रेघ ई स्थळीं दुभागून बई रेघ करून वाढविली; अशी कीं, ईफ = बई होईल. कफ सांध. तेव्हां बअई, कईफ हे दोन △ (४ सि॰म॰) एकरूप ∵ < अ = <ईकफ परंतु <अकड > <ईकफ आहे ∴ त्याचे बराबरीचे <अ हून ही मोठा आहे हें सिद्ध.

या प्रमाणेंच अक रेघ वाढवून बक दुभागिली असतां <बकड अथ॰ <अकड > <ब होईल.

सत्रावा सिद्धांत.

त्रिकोणाचा कोणत्या ही दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून कमी असते.



अबक△ त कोणत्या ही दोन कोनांची बेरीज दोन का॰ पेक्षां कमी आहे.

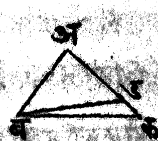
बक बाजू ड पर्यंत वाढीव. आतां (१६ सि॰म॰) <अकड > < ब अ॰ < अ

आहे. या दोहोंत <अकब पर्यायानें मिळव. तेव्हां (<अकब+<अकड)>(<अकब+<ब) आहे. परंतु (१२ सि॰ म॰) <अकब+<अकड=२का॰ ∴ <ब+<अकब दोन का॰ हून उणें. याप्रमाणें <ब+<अ, <अ+<क हे दोन काटकोनाहून कमी हें सि॰द्ध.

कुर. एका बिंदूपासून एका रेषेवर दोन लंब होणार नाहींत.

अठरावा सिद्धांत. ह॰१

त्रिकोणांत मोठे बाजू समोरील कोन ल्हान बाजू समोरील कोनापेक्षां मोठा असतो.



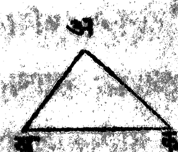
अबक△त अक>अब असेल, तर <ब><क होईल.

अक>अब आहे ∴ अब=अड करून बड सांध.

आतां (१६ सि॰ म॰) <अडब><क आहे. अड=अब आहे ∴ (५ सि॰ म॰) <अडब=<अबड तेव्हां <अबड><क आहे ∴ <ब चातुकडा><क आहे तेव्हां सर्व <ब><क आहे हें सि॰द्ध.

एकुणिसावा सिद्धांत. ह॰१

त्रिकोणांत मोठी बाजू मोठे कोना समोर असते.

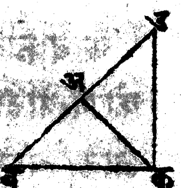


अबक△त <ब><क आहे तर अक>अब होईल.

अक>अब नसेल तर बरोबर किंवा ल्हान असेल. परंतु बरोबर असल्यास (५ सि॰ म॰) <ब=<क असावा तो नाहीं ∴ बरोबर नाहीं. आणि अक<अब असेल तर (१८ सि॰ म॰) <क><ब असावा तो नाहीं ∴ अक>अब आहे हें सि॰द्ध.

विसावा सिद्धांत. ह॰१०

त्रिकोणाचा कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूहून मोठी आहे.

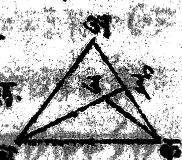


अबक △ त अब + अक > बक होईल.

बअ, ड पर्यंत वाढीव आणि अक = अड करून, डकसांध अड = अक आहे ∴ (५ सि॰ अ॰) < अकड = < ड परंतु < बकड > < अकड आहे ∴ < ड पेक्षां ही मोठा आहे. आतां बडक △ त (१७ सि॰ अ॰) < बकड > < बडक ∴ बड बाजू > बक बाजू आहे. पण बड = अब + अक ∴ अब + अक > बक हें सिद्ध.

एकविसावा सिद्धांत.

त्रिकोणांत एक बिंदू घेऊन तो व कोणत्याही दोन बाजू यांची टोकें सांधिलीं असतां जा रेघा होतात त्यांची बेरीज, त्या त्रिकोणाच्या दुसऱ्या दोन बाजूंच्या बेरजेपेक्षां उणी होते. आणि त्या रेघांमधील कोन त्रिकोणाचे घेतल्या दोन बाजूंचे मधील कोनाहून मोठा होतो.



अबक △ त ड बिंदु घेऊन, त्यापासून बड, कड रेघा केल्या असतां अब + अक > बड + कड होईल आणि < बडक > < अ होईल.

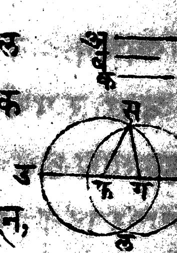
बड बाजू ई पर्यंत वाढीव. (२० सि॰ अ॰) अब + अई > बड + डई आहे आणि डई + कई > कड आहे. बेरीज घेऊन, अब + अई + डई + कई > बड + कड + डई साधारण डई वजा करून, अब + अक > बड + कड आहे हें सिद्ध.

(१६ सि॰ अ॰) < बईक > < अ आहे, आणि < बडक > < बईक आहे ∴ < ड > < अ आहे, हें सिद्ध.

बेविसावा सिद्धांत. इ॰ क॰

तीन बाजूं पासून त्रिकोण करावयाचा परंतु कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसरे बाजूहून जास्त असावी.

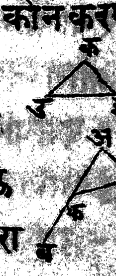
अ,ब,क तिन रेघा दिल्या आहेत अशा कीं त्यांतील कोणत्याही दोहोंची बेरीज तिसरी पेक्षां अधिक आहे, त्या पासून △ करावयाचा.



आतां ड ई एक रेघ काढून तिचे ड चोघटापासून, अ,ब,क रेघांबरावर अनुक्रमें डफ, फह, आणि गह खंड क[illegible] नंतर फ मध्य करून, फड त्रिज्येनें एक ० कर, तसेंच ग मध्य [illegible] रून गह त्रिज्येनें एक ० कर. आतां हीं दोन वर्तुळें स स्थळीं परस[illegible] छेदितात. वेथून सफ, सग रेघा कर, तेव्हां सगफ हा इच्छि[illegible] झाला. ज्याचा तीन बाजू अ,ब,क रेघांबरावर आहेत; कारण [illegible] ज्या सफ=डफ=अ, तसेंच गस=गह=क आणि गफ=ब [illegible] अ,ब,क या तीन रेघांपासून गसफ △ झाला हें सिद्ध.

तेविसावा सिद्धांत. इ० क्र० [illegible]

दिले रेघेंत दिले बिंदूजवळ सांगितले कोना बराबर कोन कर[illegible] री रेघ करावयाची.



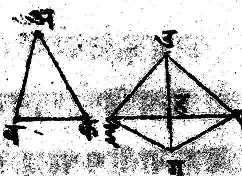
अब रेघेंत अ बिंदू जवळ <क एवढा कोन करावयाचा.

आतां कई आणि कड रेघांत ड आणि ई बिंदू घेऊन ते सांध. (२२ सि० प्र०) कडई △चा तीन ही बाजू बराबर ज्यांना बाजू होतील, असा दिले रेघेशीं अफग △ कर. तेव्हां [illegible] दोन △ (८ सि० प्र०) एकरूप ∴ <क=<अ हें सिद्ध.

चविसावा सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचे दोन बाजूं बराबर [illegible] सून, एकाचा अंतर कोन दुसऱ्याचे अंतर कोना पेक्षां मोठा असे[illegible] तर मोठ्या कोना समोरील बाजू लहान कोना समोरचा बाजू पेक्ष[illegible]

मोठी होईल.



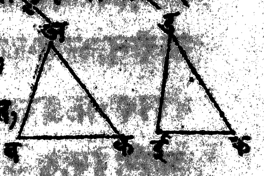
अबक आणि डईफ या दोन △त एकाचा अब, अक या दोन बाजू दुसऱ्याचे डई, डफ चे बराबर असून <ड > <अ असेल, तर ईफ बाजू > बक बाजू होईल.

<अ = < ईडग होईल अशी अक = डग रेघ करून इग, गफ सांध. अबक आणि डईग हे दोन △ (४सि.म.) एकरूप ∴ बक = ईग अक = डग परंतु अक = डफ ∴ (१म.म.) डग = डफ ∴ डगफ △त (५सि.म.) <डगफ = <डफग परंतु < गफड > <ईफग आहे ∴ <गफड चे बराबरीच्या ओ, <ईगफ चा तुकडा <डगफ तो ही <ई फगपेक्षां मोठा आहे.

तेव्हां <ईगफ, <ईफगपेक्षां फारच मोठा आहे ∴ (१९सि.म.) फई > ईग आहे ईग = बक आहे ∴ (१म.म.) फई > बक आहे हें सिद्ध.

पंचविसावा सिद्धांत

दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजू बराबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याचे तिसरे बाजूहून मोठी असेल, तर तिचे समोरचा कोन लहान बाजू समोरचे कोनाहून मोठा होईल.

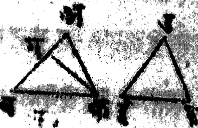


अबक आणि डईफ या दोन △त एकाचा अब, अक बाजू दुसऱ्याचा डई, डफ बाजू बराबर आहेत, आणि बक > ईफ आहे, तर <अ > ड होईल.

आतां <अ > <ड नसल्यास बराबर किंवा लहान असेल. परंतु <अ = <ड असल्यास (४सि.म.) बक = ईफ होईल. पण ती बराबर नाहीं. तसें <ड > <अ असेल तर (२४सि.म.) ईफ > बक होईल. परंतु बक, ईफचे बराबर किंवा लहान नाहीं ∴ <अ > <ड आहे, हें सिद्ध.

सविसावासिद्धांत. इ॰२

एका त्रिकोणाचे दोन कोन व एक बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन कोन व सजातीय बाजू यांशीं बराबर असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकरूप होतील.

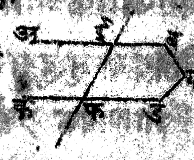


अबक आणि डईफ या △त <ब = <ई आणि <क = <फ, बक = ईफ असेल, तर हे दोन △ एकरूप होतील म्हणजे अब = डई, अक = डफ आणि <अ = <ड होईल.

आतां अब = डई नसेल तर बग = डई करून गक सांध. तेव्हां बकग आणि डईफ हे दोन △ (४ सि॰ प्र॰) एकरूप ∴ <बकग = <फ आणि (१ स्वसि॰ प्र॰) <अकब = <फ आहे ∴ (१ स्व॰) <बकग = <अकब परंतु तुकडा सर्व वस्तू बराबर होणे परम अशक्य ∴ अब = डई निश्चय आहे ∴ (४ सि॰ प्र॰) अबक आणि डईफ हे दोन △ एकरूप हें सिद्ध.

सत्ताविसावासिद्धांत. इ॰१२

एक सरळ रेघ दोन रेघांस छेदून, दोन व्युत्क्रम कोन बराबर करीत असल्यास त्या दोन रेघा समांतर होतील.



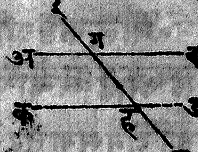
अब, कड या दोन रेघांस ईफ रेघ छेदून, अईफ आणि ईफड हे व्युत्क्रम कोन बराबर करिते, तर अब शीं कड समांतर होईल.

अब, कड स॰ नसल्यास कोठें तरी ग स्थळीं मिळतील. तेव्हां गईफ △ आला. यांत (१८ सि॰ प्र॰) <अईफ > <ईफड आहे, परंतु (कल्पि॰ प्र॰) ते बराबर. आतां एकच मोठा आणि एकच लहान हें होणें

रम अशक्य, ∵ अब, कड या समांतर आहेत, हें सिद्ध.

अठ्ठाविसावा सिद्धांत ह० १६ कु० १, २

एक रेघ दोन रेघांस छेदून बाहेरील कोन त्याचे आंतिल्याचे समोरचे त्याच बाजूचे कोना बरोबर करील. किंवा त्याच बाजूचे आंतील दोन कोन मिळून दोन काटकोना बरोबर करील, तर त्या दोन रेघा समांतर होतील.



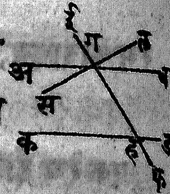
अब आणि कड यांस ईफ रेघ छेदून, <ईगब आणि <गहड हे बरोबर करील, किंवा <बगह + <गहड = २ का० करील, तर अब, कड या समां० होतील.

आतां <ईगब = <गहड (वरसा० म०) आहे आणि (१५ सि० म०) <ईगब = <अगह आहे ∴ (म० अ०) <अगह = <गहड आहे ∴ (२७ सि० म०) अब आणि कड या समांतर आहेत, हें सिद्ध.

<बगह + <गहड = २ का० आहेत आणि (१२ सि० म०) <बगह = <ईगअ (१२ सि० अ०) <ईगअ + <अगह = २ का० हें समीकरण व प्रथम समीकरण याचीं पदें मांडून <ईगअ अथ० <बगह + <अगह = <बगह + <गहड आहेत. यांत साधारण <बगह आहे तो वजा करून, (२ म० म०) <अगह = <गहड आहे ∴ (२७ सि० म०) अब, कड स० रेघा आहेत, हें सिद्ध.

एकुणतिसावा सिद्धांत. ह० १२, १४

जर एक सरळ रेघ दुसऱ्या दोन समां० रेघांस छेदिते, तर व्युत्क्रम कोन बरोबर होतात. आणि बाहेरील कोन त्याचे आंतिल्याचे समोरचे त्याच बाजूचे कोना बरोबर आणि त्याच बाजूचे आंतील दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोना बरोबर होते.



अब आणि कड या दोन समांतर रेघांस ईफ रेघ हआणि ग स्थळीं छेदित्ये तर <अगह = <गहड, <ईगब = <गहड आणि <बगह + <गहड = २का॰ होतील.

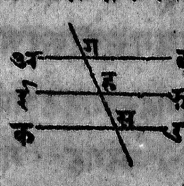
अगह कोन, गहड कोनाचे बराबर नाहीं असें मानि त्यास गहड कोना बराबर कोन करणारी ग बिंदूंतून सल रेघ कर. तेव्हां (२७ सि॰ म॰) सल कड शीं स॰ आहे; परंतु अब कडशीं स॰ आहे असें घेतलें आहे; तेव्हां एकाच बिंदूंतून एके रेघेशीं परस्पर न जमणाऱ्या अशा दोन समांतर रेघा करणें अशक्य ∴ <अगह = <गहड हें सिद्ध.

पुनः (१५ सि॰ म॰) <अगह = <ईगब आहे; परंतु (वरसांम॰) <अगह = <गहड ∴ (१म॰ म॰) <ईगब = <गहड हें सिद्ध.

पुनः <ईगब + <बगह = २का॰ परंतु <ईगब = <गहड आहे ∴ <बगह + <गहड = २का॰ हें सिद्ध.

तिसावा सिद्धांत. ह॰ १५

जा कित्येक रेघा दुसरे एके रेघेशीं समां॰ असतात त्या सर्व परस्पर समांतर असतात.

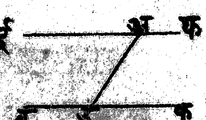


अब आणि कड सरळ रेघा ईफ रेघेशींस समां॰ असतील तर अब, कड समां॰ होतील.

या तीनही रेघांस छेदणारी गस रेषा कर. (२९ सि॰ म॰) <अगह = <गहफ आणि <गहफ = <हसड ∴ (१म॰ म॰) अगह, गहड हे व्युत्क्रम कोन परस्पर बराबर आहेत ∴ (२७ सि॰ म॰) अब, कड रेघा समांतर आहेत हें सिद्ध.

एकतिसावा सिद्धांत ह॰ क॰ ६

दिलेल्या बिंदूंतून दिलेल्या रेघेशीं समांतर रेघ कर.

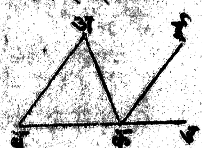


अबिंदूंतूनबकशीं समांतररेषकर.

बकरेषेंतील कोणताही एक डबिंदू आणि अबिंदु सांध. अडककोनाबरोबर व्युत्क्रमकोन करणारी अबिंदूंतूनईफरेष करतेव्हां (२७ सि॰म॰) ती बकशीं अबिंदूंतून समांतर झाली, हें सिद्ध.

त्रिकोणाचा सिद्धांत. ह॰१६।१७

त्रिकोणाची कोणतीही एक बाजू बाहेर वाढविली, तर बाहेरील कोन त्यांचे आंतिलाचे समोरचे दोन कोनांचे बेरजेबरोबर होईल. आणि त्रिकोणाचे तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांबरोबर होईल.



अबक△ चीबकबाजू ड पर्यंत वाढविली, तर-बाहेरील ∠अकड = ∠अ + ∠ ब होईल.

अबशीं कबिंदूंतून कई स॰रेषकर (२३ सि॰म॰)

∠अ = ∠अकई आणि ∠ ब = ∠ ईकड ∴ ∠अ + ∠ब = ∠अकड हें सिद्ध.

आतां ∠अ + ∠ ब = ∠अकड यांत ∠अकब मिळविला असतां ∠अ + ∠ब + ∠क = ∠अकड + ∠अकब परंतु याबरोबरीचे दोन कोनांची बेरीज (१३ सि॰म॰) २ काट॰ बरोबर आहे, ∴ △चे आंतील ∠अ + ∠ब + ∠क = २ काटकोन हें सिद्ध.

१ कु॰ सरळरेषाकृतीचे आंतील सर्वकोन व चार का॰ मिळून त्या आकृतीचे बाजू संख्येचे दुप्पट का॰ नांबरोबर होतात. } ह॰११

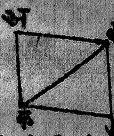
२ कु॰ कोणत्याही सरळरेषाकृतीचा बाहेरील सर्वकोनांची बेरीज चार काटकोनांबरोबर असते. } ह॰१०

३ कु॰ एका त्रि॰चा दोनकोनांची बेरीज, दुसऱ्या त्रि॰चा दोनकोनांचा बेरजे बरोबर असेल, तर तिसरे ही कोन बरोबर होतील. } ह॰१७ कु॰१

४ कु॰ का॰ △त बाकीचे दोन कोनांची बेरीज एक का॰ बरा॰ असते. ह॰१२ कु॰२

तेतिसावा सिद्धांत. ह॰२५

समांतर आणि बराबर रेषांचीं समोरी समोरचीं शेवटें सांधणाऱ्या रेषा परस्पर समांतर आणि बराबर होतील.

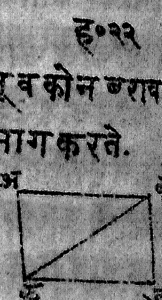


अब आणि कड या समां॰ व बराबर रेषांचीं शेवटें सांधणाऱ्या अक, बड रेषा याही स॰ व बराबर होतील.

बक सांध. आतां अब, कड या स॰ रेषांस बक रेघ छेदित्ये तेव्हां (२९सि॰म॰) <अबक=<बकड आहे. अबक आणि बकड हे दोन △ (४सि॰म॰) एकरूप ∴ अक= बड आणि <बकअ=<कबड आतां <बकअ=<कबड आहे ∴ (२७सि॰म॰) अक आणि बड या रेषा समांतर आहेत हें सिद्ध.

चवतिसावा सिद्धांत. ह॰२२

समांतर बाजूंचौकोनांत समोरासमोरच्या बाजू व कोन बराबर असतात, व कर्णरेघ त्याचौकोनाचे दोन समान भाग करते.



अबडक स॰ चौ॰ त बक कर्णरेघ आहे. तर अब=कड, अक= बड आणि △अबक= △बकड होईल.

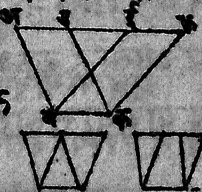
अब, कड आणि अक, बड रेघा स॰ आहेत आणि बक रेघ त्यांस मिळते ∴ (२९सि॰म॰) <अबक=<बकड आहे, <अकब=<डबक आहे. अबक आणि बकड या दोन △ त बक बाजू दोहींस साधारण आहे व एकाचे दोन कोन दुसऱ्याचे दोन कोनां बराबर आहेत ∴ हे दोन △ (२६सि॰म॰) एकरूप आहेत ∴ अब=कड, अक= बड, <अ=<ड आणि <अबक=<बकड, आणि <अकब=<डबक आहे ∴ (२म॰म॰) सर्व <अकड = सर्व <अबड हें सिद्ध.

१कु॰ समां॰ रेघांतील ऊंबांतर सारखेंअसतें.

२कु॰ वरचाकुरलरी वरून सिद्ध होतें कीं, समा॰ रेघांचाजोडांत-जे त्रि॰ वचौ॰ असतात ते सारख्या उंचीचे असतात, व जांचीउंची बरावर असते,व पाये एकाच रेघेंत व एकाच अंगास असतात, ते समांतररेघांचे जोडांत असतात.

पस्तिसावासिद्धांत. ह॰ २५

एकाच पायावर व स॰ रेघांचे एकाच जोडामध्यें जे स॰ चौ॰ असतात, ते क्षेत्रफळानें बरावर असतात.

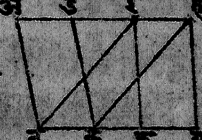


अबकड आणि ईबकफ हे दोन सं॰ चौ॰ बक पायावर आणिअफ, बक या दोन स॰ रेघांचे जोडांत आहेत, तर हे क्षेत्र फळानें बरावर होतील.

अबकडआणि ईबकफ स॰ चौ॰ आहेत ∴ बक = अडआणि बक = ईफआहे ∴ (१म॰ म॰) अड = ईफ यांस साधारण डई मिळविली, तेव्हांअई = डफ झाली,वअब = डक आहे ∴ अईब △ चा अई; अब बाजू डकफ △ चा डफ, कड बाजूं बरावर. (२९सि॰ म॰) ∠ फडक = ∠ ईअब आहे ∴ (४सि॰ म॰) हे दोन △ एकरूप. आतां अबकफ याचापिऱ्यायदांतून हे दोन सम △ पर्यायानें काढिलेअसतां अबकड स॰ चौ॰ = ईबफक स॰ चौ॰ आहे हें सिद्ध.

छत्तिसावासिद्धांत. ह॰ २५ कु॰

समानपायांवर व समांतर रेघांचे एकाच जोडांत जे स॰ चौ॰ असतात, ते परस्पर बरावर असतात.



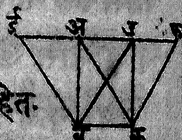
अबकडआणि ईफगह हे स॰ चौ बक, फग या सारख्या पायांवर असून अह, बग या स॰

रेघांचे जोडांत आहेत, ते परस्पर बरावर होतील. बई, कह सांध.

आतां बक = फग आहे आणि (३४ सि॰ प्र॰) फग = ईह ∴ (१प्र॰ प्र॰) बक = ईह आहे. बक, ईह या स॰ व बरावर आहेत ∴ त्यांचीं शेवटें सांधणाऱ्या जा बई, कह त्या (३३ सि॰ प्र॰) स॰ व बरा॰ आहेत. याजवरून बकहई स॰ चौ॰ आहे. (३५ सि॰ प्र॰) ईबकह स॰ चौ॰ = अबकड स॰ चौ॰ आहे. तसेंच ईबकह स॰ चौ॰ = ईफगह स॰ चौ॰ ∴ (१ प्र॰ प्र॰) अबकड स॰ चौ॰ = ईफगह स॰ चौ॰ आहे हें सिद्ध.

सततिसावा सिद्धांत. ह॰ २५

एकाच पायावर व समां॰ रेघांचे एकाच जोडांत जे त्रिकोण आहेत, ते परस्पर बरावर आहेत.

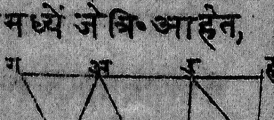


बक पायावर व बक, ईफ या स॰ रेघांचे जोडांत अबक आणि बकड हे त्रि॰ आहेत, ते परस्पर बरावर आहेत.

अड रेघ दोहों बाजूस ई आणि फ पर्यंत वाढवून ब बिंदूतून अकशीं बई आणि क बिंदूतून बडशीं कफ स॰ कर. तेव्हां (३५ सि॰ प्र॰) ईबकअ, डबकफ हे स॰ चौ॰ परस्पर बरावर आहेत. (३४ सि॰ प्र॰) अबक, बडक हे दोन △ वरसांगि॰ स॰ चौ॰ चे अर्धे आहेत ∴ (७ प्र॰ प्र॰) अबक आणि बडक हे त्रि॰ बरावर आहेत, हें सिद्ध.

अडतिसावा सिद्धांत. ह॰ २५ कु॰ १

समान पायांवर व स॰ रेघांचे एकाच जोडामध्यें जे त्रि॰ आहेत, ते बरावर आहेत.

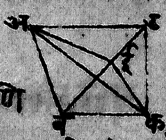


बक, ईफ या समान पायांवर आणि बफ, अड या स॰ रेघांचे एकाच जोडांत अबक आणि डईफ हे दोन △ आहेत, तर ते परस्पर बरावर आहेत.

आतां अडबाजू दोनही आंगांस वाढवून बबिंदूतून अकशीं बग-
आणि फबिंदूतून डईशीं फह स॰ कर. तेव्हां (२८ सि॰ म॰) गबकअ
स॰ चौ॰ = डईफह स॰ चौ॰ आहे. आणि (३४ सि॰ म॰) अबक त्रि॰ गाक
स॰ चौ॰ चे अर्धा आहे. तसेंच डईफ त्रि॰ डफ स॰ चौ॰ चे अर्धा आहे
∴ (७ म॰ म॰) अबक आणि डईफ हे त्रि॰ बरावर आहेत, हें सिद्ध.

एकुणचाळिसावा सिद्धांत.

एका पायावर वत्याचा एका आंगास जे समान त्रिकोण असतात
ते समांतर रेघांचे एकाच जोडांत असतात.



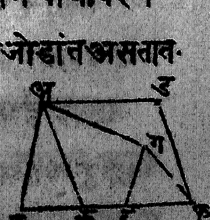
बक पायावर वत्याचे एकाच आंगास अबक आणि
डबक हे दोन समान त्रि॰ आहेत, तर ते स॰ रेघांचे एकाच जोडांत आहेत.

अड सांध. अड बकशीं स॰ आहे, जर नसेल तर, अबिंदूतून ब-
कशीं अई स॰ करून ईक सांध. (३७ सि॰ म॰) अबक त्रि॰ = बईक त्रि॰
आणि (प्रति॰ म॰) अबक त्रि॰ = बकड त्रि॰ आहे ∴ (१ म॰ म॰) बक
ड त्रि॰ = बकई त्रि॰ आहे; परंतु बकई त्रि॰, बडक त्रि॰ चा तुकडा
आहे, तेव्हां हें होणें अशक्य ∴ अड वांचून बकशीं दुसरी स॰ रेघ ना
हीं, हें सिद्ध.

कु॰ हा सिद्धांत स॰ चौ॰ वर ही लागू आहे.

चाळिसावा सिद्धांत.

जे समान त्रिकोण एका रेघेंत असणाऱ्या अशा समान पायांवर व
वत्यांचे एकाच आंगास असतात, ते स॰ रेघांचे एकाच जोडांत असतात.



बफ रेघेंतील बक आणि ईफ या समान पायांवर
वत्यांचे एकाच आंगास अबक, डईफ हे दोन त्रि॰ स
मान आहेत, तर ते स॰ रेघांचे एकाच जोडांत होतील.

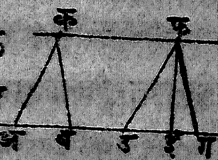
अड बिंदू सांध तर अड, बफशीं स० आहे; जर नसेल तर अबिं दूंतून बफ शीं अग स० करून फग सांध. (३८ सि० प्र०) अबकत्रि० = गईफत्रि० आहे; परंतु अबकत्रि० = डईफत्रि० घेतला आहे ∴ (१ प्र० म०) गईफ त्रि० = डईफ त्रि० आहे. तेव्हां हें होणें अशक्य ∴ अबिंदूंतून अडवांचून बक शीं दुसरी समां० रेघ व्हावयाची नाहीं ∴ अड ब-समांतर आहे हें सिद्ध.

कु० ह्या सिद्धांत स० चौ० वर लागू आहे.

अ सिद्धांत.

स० रेघांचे एकाच जोडांत जे समान त्रि० असतात, ते समान पायांवर असतात.

अबक आणि डईफ हे दोन समान त्रि० अई, कफ या स० रेघांचे एकाच जोडांत आहेत; तेव्हां अब पाया = डई पाया होईल.

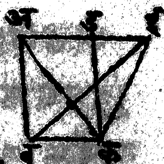


अब = डई पाया नसल्यास डई पाया ग पर्यंत वाढवून, अब = डग कर, फग सांध. तेव्हां (३८ सि० प्र०) △ अबक = △ डगफ परंतु (मे तिज्ञेंप्र०) △ अबक = △ डईफ तेव्हां (१ प्र० म०) △ डगफ = △ डईफ परंतु हें होणें परम अशक्य; कारण कोणतीही वस्तु तिचे तुकड्या बरोबर होणार नाहीं; ∴ △ अबक = △ डईफ आहे हें सिद्ध.

कु० ह्या सिद्धांत स० चौ० वरही लागू आहे.

एकेचाळिसावा सिद्धांत. ह० २६

एक स० चौ० आणि एक त्रि० एकाच पायावर व समां० रेघांचे एकाच जोडांत असतील; तर तो स० चौ० त्या △ चा दुप्पट आणि तो △ स० चौ० चे अर्धा आहे.

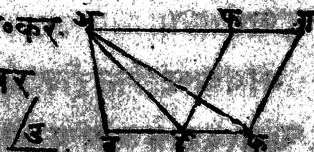


बकपायावर आणि बक, अई स॰ रेघांचे जोडांत अबकड स॰ चौ॰ आणि बकई त्रि॰ आहेत तर, ▭ अबकड = २ △ बकई अथवा △ बकई = १/२ ▭ अबकड होईल.

अक बिंदू सांध अबक आणि बकई हे दोन △ (२७ सि॰ प्र॰) बरोबर आहेत आणि (३४ सि॰ प्र॰) अबकड स॰ चौ॰ = २ △ अबक आणि अबक त्रि॰ = बकई त्रि॰ ∴ अबकड स॰ चौ॰ = २ बकई त्रि॰ हें सिद्ध.

बेचाळिसावा सिद्धांत.

दिलेल्या त्रिकोणाशीं क्षेत्रफळानें बराबर आणि ज्याचा एक कोन दिलेले कोना बराबर होईल असा एक स॰ चौ॰ कर.



अबक त्रि॰ बराबर आणि ड कोना बराबर कोन करणारा एक स॰ चौ॰ कर.

अबक त्रि॰ ची बक बाजू ई स्थळीं दुभागून अई सांध आणि ईक शीं ई बिंदूतून ड कोना बराबर कोन करणारी ईफ रेघ कर. आणि फई शीं कग व बक शीं अग स॰ कर (३१ सि॰ प्र॰) अबई आणि अकई हे त्रि॰ परस्पर बराबर. अबक त्रि॰ ईकअ त्रि॰ चे दुप्पट आहे (३७ सि॰ प्र॰) फईकग स॰ चौ॰ ईकअ त्रि॰ चे दुप्पट आहे ∴ (७ सि॰ प्र॰) अबक त्रि॰ कगफई स॰ चौ॰ चे बराबर आहे हें सिद्ध.

त्रेचाळिसावा सिद्धांत. ६॰२८

स॰ चौ॰ चे कर्ण रेघेचे दोहोकडे जे स॰ चौ॰ कांप्लुमेंट होतात ते परस्पर बराबर.

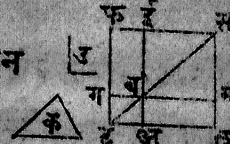


अबकड स॰ चौ॰ त अक कर्ण रेघेचे दोहोकडे बस, सड स॰ चौ॰ कांप्लुमेंट आहेत, ते परस्पर बराबर आहेत.

(३४सि॰प्र॰) △अबक = △अडक तसेंच △अईस = △ अईस, △सफक = △सगक यांतील दुसरें व तिसरें समी॰ प्रथमांतून वजा करून, बस = सड हें सिद्ध.

चवेचाळिसावा सिद्धांत.

दिलेल्या त्रिकोणाबराबर, दिलेले रेघेवर आणि दिलेला कोन करणारें असें स॰चौ॰ करावयाचा.

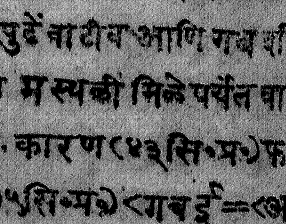


क त्रि॰ बराबर आणि ड कोनाबराबर कोन करणारें अब रेघेवर स॰चौ॰ करावयाचें.

(४२सि॰प्र॰) क त्रि॰ बराबर व ड कोनाबराबर कोन करणारें फगबईस॰चौ॰ कर आणि तो असा ठेव कीं बई आणि अब मिळून एक सरळ रेघ होईल. नंतर फग वाढीव असा कीं, गह = बअ होईल. गब शीं हल स॰कर. व ह कर्णरेघ करून ती पुढें वाढीव आणि गब शीं फस, व अई शीं सल स॰कर गब, सल स म स्थळीं मिळे पर्यंत वाढीव, तर बअलम हा इच्छिला स॰चौ॰ झाला. कारण (४३सि॰प्र॰) फबस॰चौ॰ = बल स॰चौ॰ आहे आणि (१५सि॰प्र॰) <गबई = <अबम आहे ∴ अब रेघेवर इच्छिला स॰चौ॰ झाला हें सिद्ध.

पंचेचाळिसावा सिद्धांत.

दिलेल्या चौकोनाकृती बराबर स॰चौ॰ कर असा कीं ज्याचा एक कोन दिलेल्या कोनाबराबर होईल.



डअबक चौकोनाबराबर स॰चौ॰ करावयाचा, ज्याचा कोन दिले ई कोनाबराबर होईल.

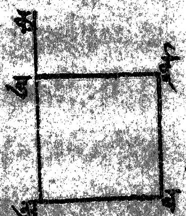
डब बिंदु सांध आणि (४२सि॰प्र॰) डअब त्रि॰ बराबर व <ई एवढा <फसह कोन करणारा फसहग स॰चौ॰ कर आणि (४४सि॰प्र॰) ब

कड त्रि०बराबर गह रेघेवर ∠ई बराबर ∠गहम कोन करणारा ग
हमल स०चौ०कर. तेव्हां फसमल हा इष्ट ऌस०चौ० झाला हें सिद्ध.

कु०जाचें क्षेत्रफळ एका दिलेल्या सरळरेघाकृति बराबर होईल,
व ज्याचा एक कोन दिले कोना बराबर होईल, असा स०चौ० दिले रेघे
स कसा लावावा, हें या सिद्धांता पासून स्पष्ट कळून येतें.

शेचाळिसावा सिद्धांत. ह०कृ०१८

दिलेल्या सरळ रेघेवर चौरस करावयाचा.



अब रेघेवर चौरस करावयाचा.

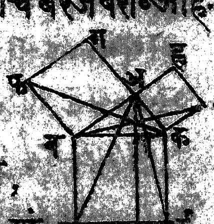
अब वर अक लंब कर आणि अब=अड घे.
ड बिंदूतून अब शीं डई स०कर. तशीच अड
शीं बई स०कर. तर अबईड चौरस होईल.

अब=अड आहे ∴ (३४ सि०म०) डई, बई याही अब चे ब
राबर आहेत. ∠अ का० आहे ∴ (२९ सि०म०) चारही कोन का० आ
हेत ∴ अबडई चौरस आहे. हें सिद्ध.

कु० स०चौ०त एक कोन का० असला तर चारही कोन का० असतात.

सत्तेचाळिसावा सिद्धांत. ह०२५

का०त्रि०त कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बरा०आहे.



अबक का०त्रि०त अ कोन का० असेल
तर, बक² = अब² + अक² होईल.

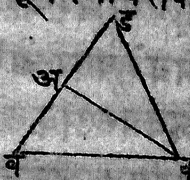
बक वर बई आणि अब, अक यांवर बग,
असचौरस कर. आणि कफ, बस अड अई सां
धआणि बड शीं अल स०कर. बफक आणि बअड हे दोन △ (४ सि०
म० एकरूप ∴ (४१ सि०म०) बग, बकफ △चे दुप्पट आहे. तसेंच बल

का॰चौ॰ अबड ▲चे दुप्पट ∴ (१म॰म॰) अब चा वर्ग, बलका॰चौ॰चे बरोबर, या प्रमाणें अकचा वर्ग, कलका॰चौ॰ बरोबर आहे ∴ $अब^2 + अक^2 = बक^2$ हें सिद्ध.

कु॰ का॰▲त कोणत्याही बाजूचा वर्ग कर्ण आणि दुसरी बाजू यांचे वर्गांचा वजा बाकी बरोबर आहे.

अठ्ठेचाळिसावा सिद्धांत. ह॰ २५ कु.

त्रि॰चा एक बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गाबरोबर असेल तर, तो का॰त्रि॰ होईल.

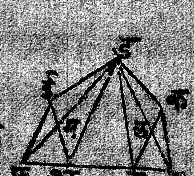


अबक त्रि॰ $बक^2 = अब^2 + अक^2$ असेल तर
अबक हा का॰त्रि॰ होईल.

अ कवर अ स्थळीं अड लंब कर आणि अब = अड करून, कड सांध. तर (४७ सि॰प्र॰) $अड^2 + अक^2 = कड^2$ आणि (प्रतिज्ञेप्र॰) $अब^2 + अक^2 = कड^2$ परंतु अब = अड आणि अक साधारण आहे ∴ बक = बड तेव्हां अबक आणि अकड हे दोन त्रि॰ एकरूप. परंतु अकड हा का॰त्रि॰ आहे ∴ अबक हा का॰त्रि॰ आहे, हें सिद्ध.

ब सिद्धांत. ह॰ कृ॰ २७

दिलेल्या आकृती बराबर त्रि॰ करावयाचा.

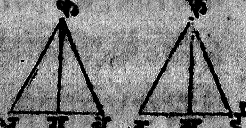


अबकडई या आकृती बराबर त्रि॰ करावयाचा. अड, बड सांधून, त्यांशीं अनुक्रमें ई आणि क स्थळापासून ईफ, कग स॰रेषा कर. अब दोहोंकडे फ आणि ग स्थळांपर्यंत वाढीव. फड, गड सांध. तेव्हां फगड हा इच्छिला त्रि॰ झाला. कारण फईड आणि फईअ हे दोन त्रि॰ (२७ सि॰प्र॰) बराबर यांतून साधारण ▲फमई वजा जातां, बाकी ▲

ईमड = △ फमअ. तसेंच दुसरेबाजूस △ कळड = △ बळगआ
हे ∴ अबकडईयाक्षेत्रांतून, △ ईगड आणि △ कळडहे वजाक
रून, त्यांचेबद्दल △ फळम आणि △ बळग मिळविले असतां ∴
अबकडई = △ फगड आहे हें सिद्ध.

क सिद्धांत.

दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूं बराबर अस
तील, व बरोबरीचा बाजूं पैकीं सजातीय बाजू समोरील एकाचा ए
क कोन दुसऱ्याचा एक कोनाबराबर असेल; तर ते दोन त्रिकोण एक
रूप होतील.



अबक आणि डईफ या दोन त्रि॰त एकाचा
अब, अक बाजू व ब कोन, दुसऱ्याच्या डई, ड
फ बाजू व ई कोन यांचे बराबर असतील तर हे दोन त्रि॰ एकरूप होतील.

क आणि फ कोनापासून अब, डई रेषांवर कग फस लंब कर.
तर बकग आणि ईफस हे दोन △ (३२ सि॰ ४कु॰ प्र॰ आणि २६ सि॰प्र॰)
एकरूप कग = फस आणि गब = सई आतां अकग आणि डफ
स या दोन △त (४७ सि॰ कु॰ प्र॰) अग = डस आहे आणि (वरसि
द्धकेल्याप्र॰) गब = सई आहे तेव्हां (२प्र॰प्र॰) अब = डई ∴ (८सि॰प्र॰)
अबक आणि डईफ हे दोन त्रि॰ एकरूप हें सिद्ध.

पहिल्या बुकाचे प्रश्न.

१ समद्विबाजू त्रिकोणांत शिरकोनास दुभागणारी रेघ पायास लं
बानें दुभागिले . . . . ह॰ ३सि॰१कु॰

२ दिलेल्या दोन बिंदूपासून दिलेल्या रेघेंत सारखे अंतरावर एक
बिंदू काढावयाचा.

३ एकरेघ दुभागून तिजवर लंब केला असतां लंबांतील कोणताही बिंदू रेघेच्या दोनही टोकांपासून बराबर अंतरानें असतो. आणि लंबांतील बिंदूशिवाय कोणताही बिंदु बराबर अंतरानें असणार नाहीं.

४ दोन बिंदु सांधणाऱ्या रेघेच्या मध्यांतून एक रेघ काढिली, आणि छेदन बिंदूपासून बराबर अंतरानें त्या रेघेंत दोन बिंदु घेतले तर ते मूळ बिंदूंपासून बराबर अंतरानें असतील.

५ सांगितलेल्या बिंदूपासून सरळ रेघेवर ज्या रेघा करितां येतात त्यांत लंबरेघ सर्वांत लहान होईल. आणि तिजवरील रेघा अनुक्रमे मोठ्या होत जातील. ह०२१

६ त्रि०चे दोन बाजूंची बेरीज बाकी तिसरे बाजूहून कमी असते. ह०११

७ दिलेले दोन बिंदु सांधणाऱ्या रेघेच्या मध्यांतून जाणाऱ्या रेघेवर दिलेले दोन बिंदूंपासून लंब केले, तर ते परस्पर बराबर होतील.

८ कोन दुभागणाऱ्या रेघेंतील कोणताही बिंदु बाजूंपासून बराबर अंतरानें असतो.

९ समांतर आणि बराबर रेघांचीं व्युत्क्रम टोकें सांधणाऱ्या रेघा परस्परांस दुभागितात.

१० समद्विबाजू का० त्रि०त बाकी राहिलेले कोन अर्ध अर्ध काटकोना बराबर असतात.

११ समद्विबाजू त्रि०चे शिरकोनाकडील बाजू वाढविली असतां बाहेरील कोन पायाकडील कोणतेही कोनाचे दुप्पट होतो.

१२ जर कोणत्याही त्रिकोणाचा बाहेरील व त्याचा आंतिलाचे समोरचा कोन हे जर दुसऱ्या त्रिकोणाचा सजातीय कोनाचे अनुक्रमें दुप्पट असतील, तर पहिल्याचा तिसरा कोन दुसऱ्याचा तिसरे कोनाचे दु

ष्पट होईल

१३ समांतर रेषांस छेदणारी अशीरेष करकी, जिच्या मधील खंड दिलेल्या रेषेबरोबर होईल.

१४ दिलेल्या बिंदूंतून अशी रेष करकी, ती दिलेल्या दोन रेषांस छेदील, आणि त्या रेषांशीं समान कोन करील.

१५ परस्परांस छेदणाऱ्या अशा दोन रेषा दुसऱ्या दोन रेषांशीं समांतर असल्यास पहिल्या रेषेंतील कोन दुसऱ्या रेषेंतील कोना बरोबर होईल.

१६ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज, पायाच्या मध्य आणि शिरकोन सांधणाऱ्या रेषेची दुप्पट यांपेक्षां मोठी असते.

१७ का॰त्रिकोणांत कर्ण आणि दुसरी बाजू यांची वजा बाकी, किंवा बेरीज आणि तिसरी बाजू यांपासून का॰त्रिकोण करावयाचा.

१८ समांतर रेषांमध्यें अशी रेष करकी, जी दिलेल्या बिंदुस्थीं दुभागिली जाईल.

१९ समद्विबाजू त्रिकोणाच्या पायांतील कोणत्याही बिंदूपासून दुसऱ्या दोन बाजूंवर लंब केले असतां, त्यांची बेरीज पायाकडील कोनापासून समोरच्या बाजूवर केलेले लंबाबरोबर आहे.

२० त्रिकोणाचे दोन कोन दुभागणाऱ्या रेषांचा छेदन बिंदु आणि शिरो बिंदु सांधणारी रेष शिरकोनास दुभागिते.

२१ समबाजू त्रिकोणांतील कोणत्याही बिंदूपासून तीनही बाजूंवर लंब केले असतां, त्यांची बेरीज त्या त्रि॰चे उंचीं बराबर असते.

२२ त्रिकोणाचा शिरकोन विशाळ, काटकोन, किंवा लघु असेल, तर त्याचे पायाचा मध्य आणि शिरोबिंदु सांधणारी रेष पायाचें अ

धाहून अनुक्रमें लहान, बरोबर, किंवा मोठी होईल.

२३ त्रिकोणाच्या दोन बाजू दुभागणाऱ्या लंबाच्या छेदन बिंदूपासून तिसऱ्या बाजूवर लंब केला, तर तो तीस दुभागील.

२४ त्रिकोणाच्या शिरकोनास दुभागणारी, व पायावर लंब असणारी, या रेघांमध्यें जो कोन होतो, तो पायाकडील कोनांचे वजाबाकी बरोबर होतो.

२५ दिले रेघेंत असा बिंदू काढ कीं, त्या बिंदूपासून दिलेले दोन बिंदूपर्यंत रेघा काढिल्या असतां जे कोन पडतील ते बरोबर होतील.

२६ त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज व पायाकडील कोन यांपासून त्रिकोण कर.

२७ त्रिकोणाच्या पायाच्या दोनही टोकांपासून समोरच्या बाजूस दुभागणाऱ्या रेघेचा छेदन बिंदू आणि शिरोबिंदू सांधणारी रेघ पायास दुभागील.

२८ एका पायावर त्याच्या एकाच बाजूस एकांत एक अशा समान चतुष्कोनाकृति असल्या, तर आंतील आकृतीची परिमिति बाहेरील आकृतीचे परिमितीपेक्षां लहान होईल.

बूक दुसरें.

प्रथम सिद्धांत. इ॰२॰

जेका॰चौ॰ एक अखंड रेघ आणि दुसरे खंड रेघेचे तुकडे यांत हो
तात, त्यांची बेरीज त्याच दोन अखंड रेघांत जो का॰चौ॰ होतो, त्याचे ब
रावर आहे.



बग अखंड रेघ आणि बक खंड रेघ बड,
डई, ईक तुकड्यांनीं दुभागिली तर, बग,
बक या रेघांत जो का॰चौ॰ होतो, तो बग, बड; बग, डई; बग, ई
क; यांचे का॰चौ॰ कोनाचे बेरजे बरावर आहे.

बह का॰चौ॰ बग, बक या दोन अखंड रेघांनीं कर आणि डस, ई
ल या रेघा बक वर लंब अथवा बग इसि॰ कर. आतां बह का॰चौ॰
बस, डल, ईह या का॰चौ॰नीं झाला आहे. आणि हे लहान का॰चौ॰
बग, बड; डस, डई; ईल, ईक, या रेघांत आहेत; परंतु (प्र॰बु॰२४
सि॰ब॰) डस, ईल रेघा बग चे बरावर आहेत ∴ हे का॰चौ॰ बग,
बड; बग, डई; बग, ईक; या रेघांत होतात त्यांचे बरावर आहेत, ∴
बग॰ बक हा का॰चौ॰ बग, बड; बग, डई; बग, ईक; या का॰चौ॰ ब
रावर आहे हें सिद्ध.

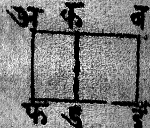
दुसरा सिद्धांत.

एक रेघेचे कसे ही दोन भाग केले असतां, प्रत्येक भाग आणि सर्व रे
घ यांचे का॰चौ॰ चे बेरजे बरावर सर्व रेघेचा वर्ग आहे.

प्रथम सिद्धांताप्रमाणें सिद्ध.

तिसरा सिद्धांत.

एका रेघेचे कसेही दोन भाग केले असतां, सर्व रेघ आणि एक भाग यांचा का॰ चौ॰, दोन भागाचा का॰ चौ॰ आणि पूर्वी घेतलेल्या भागाचा वर्ग यांचे बेरजे बराबर आहे.



अब रेघेचे अक, बक हे दोन भाग केले तर अब·बक = अक·बक + बक^2 होईल.

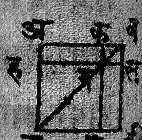
अब रेघेवर अब, बक रेघांनी अई का॰ चौ॰ कर आणि क बिंदूतून कड रेघ अफशीं अ॰ बई शीं स॰ कर. म्हणजे कई, बक चा वर्ग होईल. कारण बई = बक आहे.

आतां अई का॰ चौ॰ अड, कई या दोन आकृतीं मिळून झाला आहे, परंतु अड आकृति अक, बक रेघांचे का॰ चौ॰ बराबर आहे व कई, बक चे वर्गा बराबर आहे :. अब·बक = अक·बक + बक^2 हे सिद्ध.

चवथा सिद्धांत.

ह॰ २१

एका रेघेचे दोन भाग केले असतां, सर्व रेघेचा वर्ग दोन भागांचे वर्गांचे बेरजे हून दोन भागांचे का॰ चौ॰ चे दुपटीनें अधिक आहे.



अब रेघेचे अक, बक हे दोन भाग केले असतां अब^2 = अक^2 + बक^2 + २अक·बक होईल.

अब रेघेवर अडईब वर्ग कर. बड सांध. क बिंदूतून कफ रेघ अडशी अ॰ बई शीं स॰ कर. तसेंच ग बिंदूतून हस रेघ अब शीं अ॰ डई शीं स॰ कर.

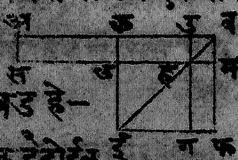
आतां (१ बु॰ २९ सि॰ म॰) ∠अडब = ∠कगब आणि (१ बु॰ ५ सि॰ म॰) ∠अडब = ∠अबड आहे :. (१ म॰ प॰) ∠कगब = ∠कबग :. (१ बु॰ ६ सि॰ म॰) कग, कब चे बराबर आणि (१ बु॰ ३४ सि॰ म॰) कग, कब यांचे–

समोरचे गस, बसचे बराबर ∴ कस आकृति समभुज आहे, आणि तिचा क कोन का॰ आहे ∴ (१ बु॰ ४६ सि॰ प्र॰) त्या आकृतीचे चारी कोन का॰ आहेत, ∴ कस, कब चा वर्ग आहे. या प्रमाणें च हफ, अक चा वर्ग आहे. (१ बु॰ ४३ सि॰ प्र॰) अग, गई हे का॰ चौ॰ परस्पर बराबर आहेत. आतां अई वर्ग चार आकृति मिळून झाला. म्हणजे अक, बक रेषांचे दोन वर्ग आणि अक, बक रेषांचे का॰ चौ॰ चा दुप्पट ∴ अबै = अकै + बकै + २ अक॰ बक आहे हें सिद्ध.

कु॰ चौरसांत जास॰ चौ॰ तून कर्णरेष जात्ये, ते ही चौरस असतात.

पांचवा सिद्धांत.

कोणत्याही रेषेचे दोन सम व दोन विषम भाग केले, तर विषम भागाचा का॰ चौ॰ आणि सम व विषम भागांमधील अंतराचा वर्ग एक सम भागाचे वर्ग बराबर आहे.



अब रेषेचे अक, बक हे दोन सम, अड, बड हे दोन विषम भाग केले तर, बकै = अड × बड + कडै होईल.

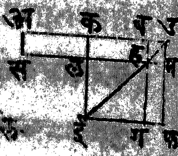
बक रेषेवर कफ वर्ग करून ईब सांध. ड बिंदूंतून डग, कई शीं अथ॰ बफ शीं स॰ कर आणि ह बिंदूंतून सम, अब शीं अ॰ ईक शीं स॰ कर आणि अस, बफ शीं स॰ कर.

(१ बु॰ ४३ सि॰ प्र॰) कह = हफ यांत डम मिळीव. तेव्हां कम = डफ या दोहोंत कह मिळविला असतां अह म्हणजे अड॰ बड = कम + मण अ॰ कमग या दोनही पेट्यांत लम म्हणजे कड चा वर्ग मिळीव. तेव्हां अह + लग = लग + कमग ∴ अड × बड + कडै = बकै हें सिद्ध.

कु॰ दोन रेषांचे वर्गांची वजावाकी, त्या दोन रेषांची बेरीज आणि वजावाकी यांचे का॰ चौ॰ चे बराबर आहे. . . . . ह॰ ३३

सहावासिद्धांत.

कोणत्याही रेषेचे दोन समभाग करून ती पुढें वाढविली असतां, वाढविल्यासहित सर्व रेष आणि वाढविलेला भाग यांचा का॰ चौ॰ आणि अर्धाचा वर्ग यांची बेरीज, अर्ध रेष अधिक वाढविलेला भाग यांचे वर्गा बरोबर आहे.

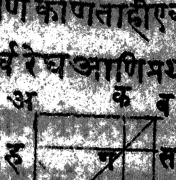


अब रेषेचे अक, बक दोन समान भाग करून पुढें ड पर्यंत वाढविली असतां, अड॰बड + बक^2 = कड^2 होईल.

कड रेषेवर कफ वर्ग करून, बाकी सर्व कृत्य (५ सि॰ प्र॰) कर. (१ बु॰ ३६ सि॰ प्र॰) अल का॰ चौ॰ = कह का॰ चौ॰ आहे (१ बु॰ ४३ सि॰ प्र॰) कह = हफ ∴ (१ स्व॰ प्र॰) अल = हफ या दोहोंत कम मिळविला असतां कमगआकृति, अम का॰ चौ॰ चे बरोबर. यांत लग म्हणजे बक^2 मि॰ तेव्हां कमग + लग = अम + लग ∴ अड॰बड + बक^2 = कड^2 आहे हे सिद्ध.

सातवासिद्धांत.

रेषेचे कसेही दोन भाग केले असतां, सर्व रेष आणि कोणताही एक भाग यांचे वर्गांची बेरीज, दुसरे भागाचे वर्गाहून, सर्व रेष आणि प्रथम भाग यांचे का॰ चौ॰ चे दुपटीने अधिक आहे.



अब रेषेचे अक आणि बक हे दोन भाग केले तर, अब^2 + बक^2 = अक^2 + २ अब × बक होईल.

अब वर अई वर्ग करून बड सांध. क बिंदूतून अड शीं अ॰ बई शीं कफ आणि न बिंदूतून अब शीं अथवा डई शीं हस स॰ कर. (१ बु॰ ४३ सि॰ प्र॰) अन, नई हे का॰ चौ॰ बराबर. यांत कस मिळविला तर, अस = कई आणि अस + कई = २अस = असफ + कस = २अब॰बक यांत हफ चौ॰ मिळीव. तेव्हां असफ + कस + हफ = २ अब॰बक +

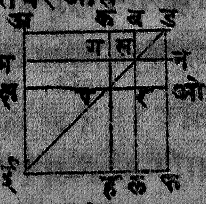
हफयांतअसफ + हफ = अब^2, कस = बक^2, आणि हफ = अक^2 ∴
अब^2 + बक^2 = २अब · बक + अक^2 आहे हें सिद्ध.

दुसराप्रकार (२बु· ४सि·प्र·) अब^2 = अक^2 + बक^2 + २अक· बक यांत बक^2 मिळीव. अब^2 + बक^2 = अक^2 + २बक^2 + २अक· बक, (२बु· ३सि·प्र·) किंमत मांडून अब^2 + बक^2 = २अब · बक + अक^2 हें सिद्ध.

कु· दोनरेषांचे वर्गांची बेरीज, त्यारेषांचे का·चौ·ची दुप्पट आणि त्यांचे वजाबाकीचा वर्ग यांचे बेरजे बराबर आहे. - - - - - - - - ह·३२

आठवासिद्धांत.

रेघेचे कसे ही दोन भाग केले,तर सर्व रेघ आणि कोणताही एक भाग यांचा का·चौ·ची चौपट आणि दुसरे भागाचावर्ग यांची बेरीज,सर्वरेघ,आणि प्रथम घेतला भाग यांचे बेरजेचे वर्गा बराबर आहे.



अबरेघेचे अक, बक असे दोनभागकेले तर,
४अब · बक + अक^2 = (अब + बक)^2 होईल.

अबरेघ ड पर्यंत वाढीव. अशीकीं, बड = बक होईल, नंतर अडवर अफवर्ग कर, ईड सांध, कआणि ब बिंदूंतूनकह, बलरेघा अई शीं अ·डफ शीं स·कर. नसेंप आणि सबिंदूंतून मनआणि क्षओरेघा अड शीं अ·ईफ शीं समांतर कर, कब = बड आहे ∴ (१बु· ३४ सि·प्र·) कब = बड = गस = सन = पर = रओ ∴ (१बु· ४३सि·प्र·) □ कस = □बन आणि □गर = □सओ आतां (१बु· ३६सि·प्र·) □ कस = □सओ ∴ कस, बन, गर, सओ हे चारही का·चौ· बराबर आहेत, तेव्हां ते सर्व मिळून □कस चे चौपट आहेत.

वरसांगितल्याप्र· कग = गप आहे ∴ □ अग = □ मप आणि पर = रओ आहे ∴ □पल = □रफ ∴ (१प्र·प्र·) अग, मप, पल, रफ

हे चारही का॰ ची॰ परस्पर बराबर अ॰ हे चार मिळून अग चे चौपट आहेत.

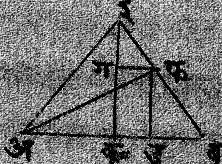
आतां हे व पूर्वीचे चार का॰ चौ॰ मिळून असचे चौपट आहेत. म्हणजे अब॰ बकची चौपट आहे, अ॰ अओहे बराबर आहे. यांत दाहे म्हणजे अकचा वर्ग मिळविला असतां अड वर्गा बराबर आहे, ∴ ४अब× बक+अक^2=(अब+बक)^2=अड^2 हें सिद्ध.

१कु॰ दोन रेघांचे का॰ चौ॰ ची चौपट आणि त्या दोन रेघांचे वजावाकीचा वर्ग यांची बेरीज त्या दोन रेघांचे बेरजेचे वर्गा बराबर आहे.

२कु॰ कोणत्याही रेघेचा वर्ग तिचे अर्धाचे वर्गाचे चौपट आहे. ह॰ ३१फु.

नववा सिद्धांत.

कोणत्याही रेघेचे दोन समान व दोन असमान भाग केले तर असमान भागांचे वर्गांची बेरीज, त्या रेघेचे अर्धाचे वर्गाची दुप्पट आणि छेदन बिंदूतील अंतराचे वर्गाची दुप्पट यांचे बेरजे बराबर आहे.



अब रेघेचे अक, बक हे दोन समान भाग आणि अड, बड हे दोन असमान भाग केले, तर अड^2+बड^2= २अक^2+२कड^2 होईल.

अब रेघेचे क मध्यावर कई लंब करून, तो अकचे बराबर कर. अई, बई सांध. तसेंच ड स्थळीं डफ लंब बईस मिळे पर्यंत कर आणि फग रेघ बकशीं स॰ कर आणि अफ सांध.

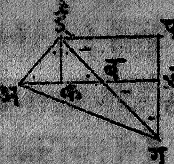
(१बु॰ ५सि॰ अ॰) <कअई=<कईअ आणि <क का॰ आहे ∴ त्यांमध्ये कीं अर्धे का॰ आहेत. तसेंच ईगफ आणि फडब या △त <गईफ=<गफई, <डफब=<डबफ ∴ (१बु॰ ६सि॰ प्र॰) गफ= ईग आणि फड= बड.

अकई का॰ त्रि॰ त अक^2+ कई^2 अथ॰ २अक^2= अई^2, गफई का॰ त्रि॰ त गई^2+गफ^2 अ॰ २ गफ^2 अ॰ २कड^2= ईफ^2 (२अ॰ प॰) २अ

अक^2+२कड^2=अई^2+ईफ^2, अई^2+ईफ^2=अफ^2. अफ^2=अड^2+फड^{2}अ॰ बड^2 ∴ २अक^2+२कड^2=अई^2+बड^2 हें सिद्ध

दहावासिद्धांत.

एकारेघेचे दोन समान भागकरून तीपुढें वाढविली असतां एकंदर रेघेचा वर्ग आणि वाढविले रेघेचा वर्ग यांची बेरीज त्यारेघेचे अर्धाचे वर्गाची दुप्पट आणि अर्धरेघ व वाढविला भाग मिळून जी रेघ होत्ये, तिचे वर्गाची दुप्पट यांचे बेरजे बराबर आहे.



अब रेघ क स्थळीं दुभागून बड पर्यंत वाढविली असतां अड^2+बड^2=२अक^2+२कड^2 होईल.

अब रेघेवर क स्थळीं अक चे बराबर कई लंब कर. अई, बई सांध, कडरेघेवर कड, कई रेघांनीं कफ स॰ चौ॰ कर. नंतर बई, फड वाढीव. अशाकीं, ग स्थळीं परस्परांस छेदितील. नंतर अग सांध.

अक, कई, बक या बाजू परस्पर बराबर आहेत ∴ (१बु॰५सि॰प्र॰)(॰) या त्रिकोणेचे सर्व कोन बराबर आहेत. आणि क स्थळावरील दोनही कोन प्रत्येकीं का॰ आहेत ∴ (॰) या त्रिकोणेचे सर्व कोन प्रत्येकीं अर्ध अर्धका॰ आहेत ∴ सर्व ∠ ई = एक का॰ आहे. (१बु॰१५सि॰प्र॰) ब स्थळावरील समोरासमोरचे कोन बराबर आहेत आणि ते प्रत्येकीं अर्धका॰ आहेत. ड आणि फ हे दोन प्रत्येकीं का॰ आहेत, ∴ (+) या त्रिकोणेचे सर्व कोन बराबर असून प्रत्येकीं अर्धका॰ आहेत ∴ (१बु॰६सि॰प्र॰) फई = फग आणि डब = डग आहे.

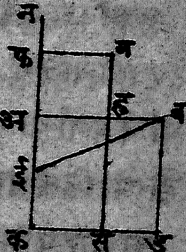
(१बु॰४७सि॰प्र॰) अक^2+कई^2 अ॰ २अक^2=अई^2

तसें (फग^2+फई^2) अ॰ २फई^2 अ॰ २कड^2 = ईग^2

वेरीज करून, २अक^2+२कड^2=अई^2+ईग^2

अई^2+ईग^2=अग^2, अग^2=अड^2+डग^2 अथवा बड^2 ∴ २अक^2+२कड^2=अड^2+ बड^2 हें सिद्ध.

अकरावा सिद्धांत.



सांगितले रेघेस मध्य प्रमाणानें छेदायाचें.

अब रेघेस मध्य प्रमाणानें छेदायाचें.

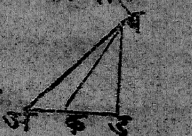
अब रेघेवर अकडब वर्ग करून अक रेघ ई स्थळीं-दुभागून, बई सांध. अक वाढीव, अशीकीं, ईफ=ईब, अफ रेघेवर अग वर्ग करून, गह, स पर्यंत वाढीव.

(२बु. ६सि. प्र.) फई^2=कफ×अफ+अई^2 परंतु फई=बई आहे ∴ बई^2=कफ×अफ+अई^2 (१बु. ४७सि. प्र.) बई^2=अई^2+अब^2 ∴ अई^2+अब^2=अफ. कफ+अई^2 दोनहीपेक्ष्यांत अई^2 वजा करून, अब^2=कफ×अफ.

अब चा वर्ग (अड) आणि कफ×अफ (फस) यांतून साधारण अस वजा केला तर, बाकी फह= हड आतां फह (अह चा वर्ग), हड (अब, हब यांचा काटकोनचौ.) ∴ अब रेघ ह स्थळीं मध्य प्रमाणानें दुभागिली हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत. ह. २६

विशालकोन त्रिकोणांत विशालकोनासमोरचे बाजूचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजेहून ज्यास्त आणि विशाल कोनापासून लंबा पर्यंत जे अंतर, या दोन रेघांचे काटकोनचौकोने दुपटीनें अधिक आहे.



अबक △ त क विशालकोन आहे आणि अक पाया वाढवून, शिरकोनापासून बड लंब केला आहे, तर अब^2

= बक^2 + अक^2 + २अक · कड होईल.

(२बु० ४सि० प्र०) अड^2 = अक^2 + कड^2 + २अक · कड यांत साधारण बड^2 मिळीव. तेव्हां अड^2 + बड^2 = अक^2 + कड^2 + बड^2 + २अक · कड (१बु ४७सि० प्र०) किंमत मांडून, अब^2 = बक^2 + अक^2 + २ अक · कड हें सि० द्ध.

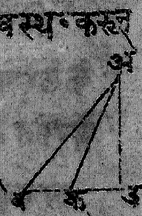
तेरावा सिद्धांत. इ० २७

कोणत्याही त्रिकोणांत लघुकोणासमोरचे बाजूचा वर्ग, दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांहून; पाया आणि लघुकोनापासून लंबापर्यंतचे अंतर या दोन रेघांचे का० चौ० चे दुपटीनें उणा आहे.

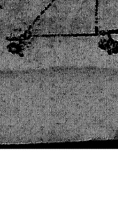
अबक △ त ब लघुकोन आहे, आणि बक पायावर अड लंब केला आहे, तेव्हां अक^2 = अब^2 + बक^2 − २ बक · बड होईल



प्रथम आकृतींत अड लंब आंत पडतो, तेव्हां (२बु० ७सि० प्र०) बक^2 + बड^2 = २बक · बड + कड^2 यांत साधारण अड^2 मिळीव. तेव्हां बक^2 + बड^2 + अड^2 = २बक · बड + कड^2 + अड^2 (१बु ४७सि० प्र०) किंमत मांडून व स्थ० करून बक^2 + अब^2 − २बक · बड = अक^2 हें सिद्ध



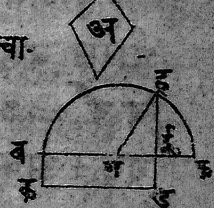
दु० आ० तींत लंब बाहेर पडतो तेव्हां, (२बु १२सि० प्र०) अब^2 = अक^2 + बक^2 + २बक · कड यांत साधारण बक^2 मिळीव, तेव्हां अब^2 + बक^2 = अक^2 + २ बक^2 + २ बक · कड साधारण गुणक काढून अब^2 + बक^2 = अक^2 + २ बक · बड स्थ० क० अब^2 + बक^2 − २बक · बड = अक^2 हें सिद्ध.



ति० आ० अक व बक वर लंब आहे, तेव्हां (१बु० ४७सि०) अब^2 = बक^2 + अक^2 स्थ० क० अब^2 − बक^2 = (अब^2 +

बक^2 – २बक·बक) हें सिद्ध·

चवदावा सिद्धांत·



दिलेल्या आकृती बराबर एक चौरस करावयाचा·

अ दिलेली आकृति आहे· या आकृतीबराबर (२पु·४५ सि·म·) बकडई का·चौकोन कर· बाजू वाढीव अशी कीं, ईफ = ईड होईल· नंतर गफवरून हफ अर्धवर्तुळ कर· डई परिघावर ह पर्यंत वाढवून गह त्रिज्या कर· तेव्हां हई रेघ चौरसाची बाजू झाली· जो चौरस सांगितल्या आकृतीबराबर होईल·

(२बु·५सि·म·) बई × ईफ + गई^2 = गफ^2 अ· गह^2 (१बु·४७ सि·म·) गह^2 = गई^2 + हई^2 ∴ बई × ईफ + गई^2 = गई^2 + हई^2 स्थ·क· बई·ईफ = हई^2, बई × ईफ = बड का·चौ· जो अ आकृतीबराबर आहे; ∵ अ = हई^2 आहे हें सिद्ध·

अ सिद्धांत· ह·२०

कोणत्याही त्रिकोणांत शिरकोनापासून पायाचे मध्यापर्यंत केलेरेषेचे वर्गाची दुप्पट आणि अर्धपायाचे वर्गाची दुप्पट यांची बेरीज दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजेबराबर आहे·



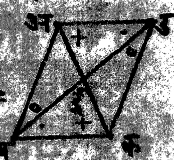
अबक△त अड रेघ बक पायाचे ड मध्यापर्यंत केली आहे, तर २बड^2 + २अड^2 = अब^2 + अक^2 होईल·

बक पायावर अई लंब कर· (१बु·४७ सि·म·) अब^2 = बई^2 + अई^2 आणि अक^2 = कई^2 + अई^2 (२म·म·) अब^2 + अक^2 = बई^2 + कई^2 + २अई^2 (२बु·१सि·म·) बई^2 + कई^2 = २बड^2 + २डई^2 ∴ अब^2 + अक^2 = २बड^2 + २डई^2 + २अई^2 (१बु·४७ सि·म·) २डई^2 + २अई^2 = २अड^2 ∴ अ

बे^{2}+अके^{2} = २अडे^{2}+२बडे^{2} हें सिद्ध.

व सिद्धांत. ह. ४०

स. चौ. त कर्णरेघा परस्परांस दुभागितात, आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज त्या चार बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बराबर आहे.



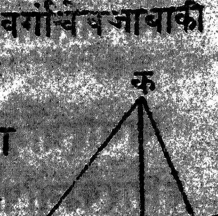
अक स. चौ. त अक, बड या दोन कर्णरेघा आहे त. तर अई = ईक, बई = ईड आणि अके^{2} + बडे^{2} = अबे^{2} + बके^{2} + कडे^{2} + डअे^{2} होईल.

(१ बु. २९ सि. म.) (.) या खुणेचे सर्व कोन परस्पर बराबर आणि (+) या खुणेचे व तसें (.) या खुणेचे ही बराबर. (१ बु. १५ सि. म.) ई स्थळींचे समोरासमोरचे कोन परस्पर बराबर. (१ बु. ३४ सि. म.) अड = बक आहे ∴ (१ बु. २६ सि. म.) अई = ईक आणि बई = ईड आहे हें सिद्ध.

(२ बु. अ सि. म.) अबे^{2}+बके^{2} = २बई^2+२अई^2 आणि कडे^{2}+डअे^{2} = २डई^2 अ. २बई^2+२अई^2 (२ म. म.) अबे^{2}+ बके^{2}+कडे^{2} + डअे^{2} = ४बई^2+४ अई^2 (२ बु. ८ सि. २ कु. म.) ४ बई^2+४अई^2 = अके^{2} + बडे^{2} ∴ अबे^{2}+ बके^{2}+ कडे^{2}+डअे^{2} = बडे^{2}+ अके^{2} हें सिद्ध.

क सिद्धांत. ह. २५

त्रिकोणांत शिरकोना पासून पायावर लंब केला असतां, दोन बाजूंचे वर्गांची वजावाकी पायाचे दोन खंडांचे वर्गांचे वजावाकी बराबर आहे.

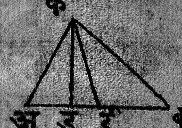


अबक त्रि. तक शिरकोना पासून अब पाया वर कड लंब केला आहे; तर अके^{2} − बके^{2} = अडे^{2} − बडे^{2} होईल.

(१बु॰४७ सि॰प्र॰) अक^२ = अड^२ + कड^२ आणि बक^२ = बड^२ + कड^२ या दोन समीकरणांची वजाबाकी क॰ अक^२ − बक^२ = अड^२ − बड^२ हें सिद्ध.

१कु॰ त्रिकोणाचे दोन बाजूंची बेरीज आणि वजाबाकी यांचा का॰चौ॰ पाया आणि लंबा पासून पायाचे मध्या पर्यंत अंतर यांचा का॰चौ॰चा दुपटी बराबर आहे.

अबक △त अब पायास कई दुभागते, व कड, अब पायावर लंब आहे; तेव्हां (अक + बक)·(अक − बक) = २अब·डई होईल.



अक^२ − बक^२ = अड^२ − बड^२ (वर सिद्ध केल्या म॰) परंतु अक^२ − बक^२ = (अब + बक)·(अब − बक) आणि (२बु॰५सि॰प्र॰) अड^२ − बड^२ = २अब·डई ∴ (अक + बक)·(अक − बक) = २अब·डई हें सि॰

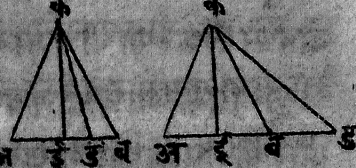
२कु॰ दिलेले रेघेंत एक बिंदु घेऊन; त्या बिंदु स्थळीं लंब केला, आणि त्या लंबांत पाहिजे तितके बिंदु घेऊन, प्रत्येक बिंदूंतून रेघेचा टोंका पर्यंत दोन दोन रेघा केल्या असतां, प्रत्येक दोन दोन रेघांचा वर्गांचीं अंतरें बराबर असतात.

३कु॰ दिलेले रेघेचे एके अंगास दोन बिंदु घेऊन त्यापासून रेघेचे दोन टोकां पर्यंत रेघा केल्या अशा कीं, त्यांचे वर्गांची अंतरें बराबर आणि जर ते बिंदु दिले रेघेचा मध्यावर केले लंबाचा एके अंगास असतील, तर ते बिंदु सांधणारी रेघ दिले रेघेवर लंब होईल.

ड सिद्धांत. ह॰२९

समद्विबाजू त्रिकोणांत पायावर अथवा पाया वाढवून त्याजवर शिरकोना पासून एक रेघ केली असतां, ती रेघ व एक बाजू यांचे वर्गांची वजाबाकी पायाचे दोन खंडाचे का॰चौ॰ बराबर आहे.

अबक समद्विबाजू △त क शिर कोना पासून अब पायावर कड रेघ केली आहे, तर अक^2– कड^2= अड· बड होईल.



प्रथम आकृति– क शिर कोना पासून अब पायावर कई लंबक र.तो अबस दुभागील. (२बु·क सि·प्र·) अक^2– कड^2 = अई^2– डई^2 (२बु·५सि·कु·प्र·) (अई+डई)· (अई–डई)=अड·बड ∴अक^2–कड^2= अड·बड हें सिद्ध.

दु·आकृति– अब पाया वाढवून त्याजवर क शिरापासून कड रेघ केली आहे· पूर्वी प्रमाणें कई लंबकर· (२बु· क सि·प्र·) कड^2 –अक^2= ईड^2–अई^2 (२बु·५सि·कु·प्र·) ईड^2–अई^2 यांची किंमत लिहून, कड^2– अक^2= अड·बड हें सिद्ध.

१कु·दोनही आकृतींतील समीकरणास स्थळां·क· असें सिद्ध होतें कीं, अक^2=कड^2±अब·बड

२कु· दोन विषम रेघांचे अंतराचें अर्ध त्यांचे बेरजेचे अर्धांत मिळविलें असतां मोठी रेघ, आणि वजा केलें असतां लहान रेघ होते. अ——ड, ब—ड या दोन रेघा असतील तर, $\frac{\text{अड}+\text{बड}}{2}+\frac{\text{अड}-\text{बड}}{2}$= अड आणि $\frac{\text{अड}+\text{बड}}{2}-\frac{\text{अड}-\text{बड}}{2}$= बड हें उघड आहे.

दुसऱ्या बुकाचे प्रश्न.

१ कोणत्याही चौ·चे चार कोनांची बेरीज चार का·बरोबर आहे·हृ·१८

२ ज्या चौ·त समोरासमोरच्या बाजू बरोबर आहेत, तें स·चौ· आहे हृ·२३

३ दोन चौरसांचे वजाबाकी बरोबर एक चौरस करावयाचें.

४ कितीही चौरसांचे बेरजे बरोबर एक चौरस करावयाचें

५ स॰चौ॰ तील एका बिंदूपासून त्याचे दोन सम भाग करावयाचें.

६ का॰चौ॰ तील एका बिंदू पासून चार कोना पर्यंत रेघा केल्या असतां, समोरा समोरचे रेघांचा वर्गांचा बेरजा बराबर होतील.

७ कोणत्याही त्रि॰चे बाजूंतील एका बिंदू पासून त्याचे बराबर दोन भाग कर.

८ का॰त्रि॰चे कोणत्याही लहान बाजूचा वर्ग, कर्ण आणि दुसरी बाजू यांची बेरीज व वजाबाकी यांचे का॰चौ॰ बराबर आहे. ह॰२६कु॰१

९ तीन रेघा एका बिंदूस्थळीं छेदून बराबर सहा कोन करतील, व रकोणत्याही एका बिंदू पासून तीन रेघांवर लंब केले असतां दोन लहान लंबांची बेरीज मोठ्या लंबा बराबर होईल.

१० का॰त्रि॰त का॰पासून कर्णावर लंब केला असतां त्याचा वर्ग कर्णाचे दोन खंडांचे का॰चौ॰ बराबर आहे. — — — — — ह॰८७

११ एक बिंदु व तीन रेघा दिल्या आहेत, जांतून दोन स॰आहेत. व त्यास॰रेघांमध्यें एक एक बिंदु शोधून काढ कीं, तो दिलेल्या बिंदूपासून बराबर अंतरानें होईल. व ते दोन बिंदु सांधणारी रेघ तिसरे रेघेशीं स॰ होईल.

१२ त्रि॰चे दोन बाजूंचे मध्य सांधणारी रेघ पायाचे अर्धा बराबर- आणि त्याशीं स॰ असते.

१३ कोणत्याही चौकोनाचे बाजूंचे मध्य सांधले तर, ती आकृति स॰चौ॰ होईल.

१४ एका रेघेचे असे दोन भाग कर कीं, एक भाग आणि दुसरी- दिलेली रेघ यांचा का॰चौ॰ दुसरे भागाचे वर्गा बराबर होईल.

१५ दिलेल्या दोन रेघां पैकीं एक इतकी वाढीव कीं, वाढविले भा

गाच्या वर्ग तीरेघ व दुसरीरेघ यांचे का॰चौ॰ बराबर होईल.

१६ कोणत्याही त्रि॰चे पायावर स॰चौ॰करून त्याचा कोन बिंदूंतून जाणारा बाजू आतील असे दोन स॰चौ॰ केले; तर त्यांची बेरीज पूर्व स॰चौ॰ बराबर होईल.

१७ चौकोनाचे चार बाजूंचे वर्गांची बेरीज त्या चौ॰चे कर्णांचे वर्गांचे बेरजेहून कर्णांचे मध्य सांधणारे रेघेचे वर्गाचे चौपटीनें अधीक आहे.

१८ कोणत्याही चौ॰चे समोरासमोरचे बाजूंचे वर्गांची बेरीज आणि त्या बाजूंचे मध्य सांधणारे रेघेचे वर्गाची चौपट मिळून दुसऱ्या दोन बाजू व दोन कर्णरेघा यांचे वर्गांचे बेरजे बराबर आहे.

१९ दोन रेघांची बेरीज व वजा बाकी यांचे वर्गांची बेरीज त्या दोन रेघांचे वर्गांचे दुपटी बराबर आहे.

२० कोणतीही रेघ मध्य प्रमाणानें छेदून, मोठा खंड व तीरेघ सांधिली असतां, जी रेघ होईल, ती सांध्याचा जागीं मध्य प्रमाणानें छेदिली जाईल.

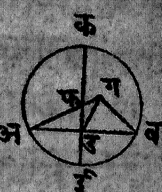
२१ चौ॰चे कर्णरेघांचे वर्गांची बेरीज त्या आकृतीचे समोरासमोरचे बाजूंचे मध्य सांधणाऱ्या रेघांचा वर्गांचा बेरजे बराबर आहे.

२२ त्रि॰चे कोणत्याही कोनाचे बरोबर भाग करून त्या रेघा समोरचे बाजूं पर्यंत वाढविल्या असतां, त्या बाजूचे असमान भाग होतील.

बूक तिसरें

प्रथम सिद्धांत.

दिलेल्या वर्तुळाचा मध्य काढावयाचा.



अबक वर्तुळ आहे; त्याचा मध्य काढावयाचा.

अब ज्येचे ड मध्यस्थळीं लंब करून दोहोंकडे परिघापर्यंत वाढीव, आणि तो फ स्थळीं दुभाग; ह्मणजे फ बिंदु वर्तुळ मध्य होईल.

आतां जर तो बिंदु फ स्थळीं नाहीं; तर ग स्थळीं आहे असें मान- आणि अग, गड, गब सांध. तेव्हां अगड आणि बगड हे दोन △ एकरूप ∵ ड स्थळावरील कोन बराबर ∴ (१बु. ११ सि. प्र.) ड-स्थळावरील दोन ही कोन का. आहेत. अब वर फड लंब आहे ∴ <फडब का. आहे ∴ <फडब = <गडब झाला; परंतु तुकडास व वस्तू बराबर होणें अशक्य ∵ ग वर्तुळ मध्य नव्हे; तर फ च वर्तुळ मध्य आहे हें सिद्ध.

कु. वर्तुळांत कोणती ही ज्या दुभागून लंब केला असतां तो वर्तुळ मध्यांतून जाईल.

दुसरा सिद्धांत

वर्तुळ परिघांतील कोणते ही दोन बिंदु सांधणारी रेघ वर्तुळांत पडते.



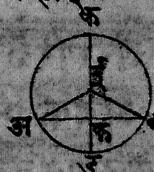
अबक ⊙ चे परिघांतील अ आणि ब बिंदु सांधणारी रेघ वर्तुळांत पडेल.

अब रेघेंत कोठें ही ई बिंदु घेऊन, ड ⊙ मध्यापासून डअ, डई,

डब रेघाकरून, डई रेघ परिघावर फ पर्यंतवाढीव. तेव्हां (१बु०५ सि०प्र०) <ब =<अ आणि (१बु०१६ सि०प्र०) <डईब ><अ∴ <ब आहे∴ (१बु०१९ सि०प्र०) बड अ० अड >डई आहे∴ अब रेघ वर्तुळांतच पडते. हें सिद्ध.

तिसरा सिद्धांत. ह०५१

वर्तुळ मध्यांतून जाणारी जी रेघ ज्येवर लंब असेल, ती ज्येस दुभागील, आणि दुभागीत असेल, तर तिजवर लंब होईल.



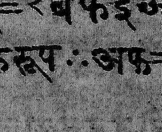
अबक ⊙ न कई रेघ ई ⊙ मध्यांतून जाऊन, अब ज्येस फ स्थळीं दुभागते ∴ ती तिजवर लंब होईल आणि ज्येवर लंब असेल तर तीस दुभागील.

ई मध्यापासून अई आणि बई रेघा कर. आतां अफई आणि बफई हे दोन △ समबाजू आहेत ∴ (१बु०८ सि०प्र०) फस्थळावरील दोन ही कोन बराबर ∴ (१बु०११ सि०प्र०) फई, अब वर लंब आहे. हें सिद्ध.

पुनः फई, अब वर लंब आहे ∴ ती अब स दुभागील. अईफ आणि बईफ या दोन △ त <अ=<ब, <अफई=<बफई आणि अई = बई ∴ (१बु०२६ सि०प्र०) हे दोन △ एकरूप ∴ अफ= बफ हें सिद्ध.

चवथा सिद्धांत.

व्यासाशिवाय कोणत्याही दोन ज्या परस्परांस दुभागीत नाहींत.



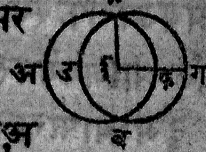
अबकड ⊙ न व्यासाशिवाय कोणत्याही दोन ज्या अक, बड या परस्परांस दुभागीत

नाहींत.

दुभागितात असें मानल्यास फ ○ मध्य व ई छेदन बिंदु सांध. फ ई रेघेनें दोनही ज्यांस दुभागिलें, ∵ (३ बु॰ ३ सि॰ म॰) ती दोनही ज्यांवर लंब आहे, ∴ ∠अईफ = ∠बईफ झाला; परंतु तुकडा सर्व वस्तू बराबर होतो हें होणें अशक्य. तेव्हां त्या दोन ज्या परस्परांस दुभागीत नाहींत. हें सिद्ध.

पांचवा सिद्धांत.

परस्पर छेदणाऱ्या वर्तुळांचा मध्य बिंदु एक नसतो.

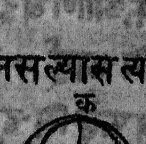


अबक आणि कडब हीं दोन वर्तुळें परस्पर छेदितात तर, त्यांचा मध्य बिंदु एक नाहीं.

आतां एक आहे, असें मानिल्यास, ई आहे असें मान. कई सांध. ईफग एक रेघ कर. तेव्हां ईक = ईफ आणि ईक = ईग ∴ ईफ = ईग परंतु तुकडा सर्ववस्तू बराबर होतो हें होणें परम अशक्य ∵ या दोन ○ चा मध्य बिंदु एक नाहीं. हें सिद्ध.

सहावा सिद्धांत.

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून स्पर्श करीत असल्यास त्या दोन वर्तुळांचा मध्य बिंदु एक नसतो.



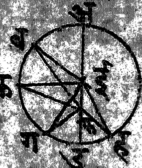
अबक ○स डईक ○ आंतून स्पर्श करीत असल्यास त्यांचा मध्य बिंदु एक नाहीं.

परंतु यांचा मध्य बिंदु एक असून, तो फ आहे असें मान. फक सांध आणि फईब रेघ कर. तर फक = फई आणि फब = फक ∴ फई = फब; परंतु हें होणें परम अशक्य ∵ त्यांचा मध्य एक ना

ह्मीं हें सिद्ध.

सातवा सिद्धांत.

वर्तुळाचे व्यासांत मध्याशिवाय एक बिंदु घेऊन त्यापासून परिघपर्यंत रेषा कराव्या त्या व्यासाच्या लहान भागापासून व्यासाच्या मोठ्या भागापर्यंत अनुक्रमे मोठमोठ्या होत जातील. आणि त्या बिंदूपासून व्यासाच्या दोहों कडे दोन अशा मात्र बराबर रेषा करितां येतील.



अबकगड एक ० आहे, त्याचा अड व्यासांतील ई मध्याशिवाय फ बिंदूपासून फग, फक, फब इ० रेषा केल्या, तर फग > फड आणि फक > फग या प्र० होतील.

ई० मध्यापासून ईब, ईक, ईग अशा रेषा कर. आतां बफई या △ त (१ बु० २० सि० प्र०) (बई + ईफ) > बफ आहे; परंतु बई = अई आहे ∴ अफ > बफ आहे. बईफ आणि कईफ या दोन △ त बई = कई, फई दोहोंस साधारण, <बईफ > <कईफ आहे; तेव्हां (१ बु० २४ सि० प्र०) बफ > कफ आहे. आतां गईफ △ त (गफ + फई) > गई आहे. गई = ईड, फई साधारण वजा जातां गफ > डफ आहे. हें सिद्ध.

आतां ई बिंदूपासून <गईफ बराबर कोन करणारी ईह रेष कर. आणि फह सांध; तेव्हां गईफ आणि हईफ या दोन △ त ईग = ईह आणि ईफ साधारण <गईफ = <हईफ आहे; तेव्हां (१ बु० ४ सि० प्र०) हे दोन △ एकरूप ∴ गफ = फह आहे; परंतु दुसरी केली असतां वरील सि० प्र० > किंवा < होईल. हें सिद्ध.

आठवा सिद्धांत

वर्तुळाचे बाहेरील बिंदूपासून वर्तुळास जा छेदन रेषा करितां येतात, त्यांतून जी मध्यबिंदूतून जाते, तिज पेक्षां स्पर्शरेषेकडे अनुक्रमें लहान लहान होत जातील. आणि त्या छेदन रेषांचे वर्तुळा बाहेरील खंड, मध्य बिंदूतून जाणारे रेषेचे खंडा पेक्षां अनुक्रमें मोठमोठे होत जातील.



अबक ○चे बाहेर ड बिंदु आहे, त्यापासून डअ, डई, डफ, डक रेषा केल्या, तर ○मध्यांतून जाणाऱ्या डअ रेषे पेक्षां डई, डफ, डक या अनुक्रमें लहान होत जातील. आणि डग पेक्षां डस, डल, डह हे अनुक्रमें मोठमोठे होत जातील.

म○मध्यापासून मई, मफ, मक, मह, मल, मस रेषा कर. डमई या △त (१बु॰२०सि॰प्र॰) (मड + मई) > डई आहे. मड + मई = अड ∴ अड > डई आहे. डमफ आणि डमई यादोन △त (१बु॰२४सि॰प्र॰) डई > डफ आहे. याप्रमाणें डफ > डक आहे. आतां डसम या △त (१बु॰२० सि॰प्र॰) (मस + डस) > मड आहे. मलड आणि मसड यादोन △त (१बु॰२१सि॰प्र॰) डस > डग आहे. तसेंच डह > डल आहे. हें सिद्ध.

नववा सिद्धांत. ह॰ ५२

जा एक बिंदूपासून वर्तुळांत दोहों पेक्षां अधिक बराबर रेषा करितां येतात, तो बिंदु वर्तुळाचा मध्य होईल.



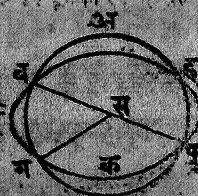
अबक ○तील ड बिंदूपासून डअ, डब, डक या रेषा केल्या त्या बराबर असतील, तर ड बिंदु ○चा

मध्य होईल.

आतांड॰ मध्यनसल्यास ई आहे, असें मानून, ड ई सांधून, ती रेघ दोहोंकडे परिघापर्यंत वाढविली, तर फग हा व्यास आहे, आणि त्यांतीरु ई या ⊙ मध्याशिवाय ड बिंदू पासून - डअ, डब, डक या रेघा केल्या, तर त्या (३ बु॰ ७ सि॰ प्र॰) बराबर होणार नाहींत; परंतु त्या बराबर आहेत; ∵ ड हाच ⊙ मध्य आहे. हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत.

कोणत्याही वर्तुळाचा परिघ दुसऱ्या वर्तुळाचे परिघास दोहोंपेक्षां अधिक ठिकाणीं छेदीत नाहीं.



दोहोंपेक्षां अधिक ठिकाणीं छेदितो, असें मानिल्यास फअब॰ स डईफ॰ दोहोंपेक्षां अधिक ब, ग, फ या ठिकाणीं छेदितें, असें मान.

अबक॰ चा स मध्य बिंदू पासून सग, सब, स फ त्रिज्या कर. (३ बु॰ ९ सि॰ प्र॰) स बिंदु डईफ॰ चा मध्य आहे; परंतु (३ बु॰ ५ सि॰ प्र॰) परस्पर छेदणाऱ्या ⊙ चा मध्य बिंदु एक असत नाहीं. ∵ या दोनही ⊙ चा मध्य एक नाहीं ∴ दोहोंपेक्षा अधिक स्थळीं छेदीत नाहीं हें सिद्ध.

अकरावा सिद्धांत. आ॰ ५२

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून स्पर्श करील, तर त्यांचे मध्य सांधणारी रेघ वाढविली असतां ती स्पर्श बिंदूंतून जाईल.



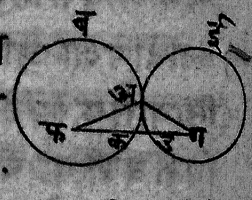
अबक॰ स अडई ॰ आंतून अ स्थळीं स्पर्श करील तर त्यांचे फ आणि ग हे मध्य बिंदू सांधिले अ

सतांती रेघ स्पर्श बिंदूंतून जाईल.

आतां स्पर्श बिंदूंतून जात नाहीं, तर ड आणि ह्र बिंदु छेदून गे ली, असें मानून, अग, गफ सांध. (१बु॰२॰सि॰प्र॰) अगफ△न (अग + गफ) > अफ आहे; यांतून गफ साधारण वजा क रितां गअ > गह आहे; परंतु ग॰मध्य आहे ∴ गह चा तुकडा गड, अग चे बरोबर होतो, हें होणें अशक्य. तेव्हां फग रेघ स्पर्श बिंदूंतूनच जाईल. हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत. ह॰४४

बाहेरून स्पर्शणाऱ्या वर्तुळांचे मध्यें सांधले, तर ती रेघ स्पर्श-बिंदूंतून जाईल.



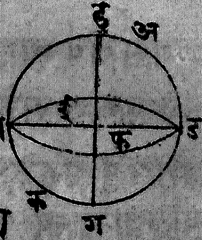
अबक आणि अडई हीं दोन ॰ बाहेरून अ स्थळीं स्पर्शतात, तर त्यांचे फ आणि ग मध्यबिंदु सांधणारी रेघ अ बिंदूंतून जाईल.

जर स्पर्श बिंदूंतून जात नाहीं, तर क आणि ड या परिघ बिंदूंतू न जाते असें मान. नंतर फअ, अग सांध फ आणि ग॰म ध्य आहेत ∴ अफ + अग = कफ + गड आहे आणि फग > (कफ + गड) आतां अफग△त (१बु॰२॰सि॰प्र॰) (अफ + अग) > फग आहे; परंतु हें होणें अशक्य ∴ फ आणि ग बिं दु सांधणारी रेघ अ स्पर्शबिंदूंतूनच जाईल. हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत.

एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून अथवा बाहेरून एका पेक्षां अधिक बिंदूस्थळीं स्पर्श करीत नाहीं.

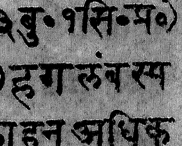
अधिक ठिकाणीं स्पर्श करतें, असें मानिल्यास ईबफ॰



अबक⊙सब आणि ड यादोन विंदू स्थळीं स्पर्श करितें असें मान- ब,ड हीं स्थळें सांधून त्यारेघेस दुभागून, त्या स्थळीं लंब कर. बड रेघ (३बु॰२सि॰म॰) दोनही ⊙त पडते आणि बड दुभागून हग लंब केला आहे; तेव्हां त्यांत (३बु॰१सि॰म॰) दोनही ⊙चे मध्य आहेत. परंतु (३बु॰११सि॰म॰) हग लंब स्पर्श विंदूंतून आवा, तो एथें जात नाहीं ∴ दोन ⊙ एकाहून अधिक ठिकाणीं स्पर्श करीत नाहीं. हें सिद्ध.

चवदावा सिद्धांत. ह॰४५

कोणत्याही वर्तुळांत जा ज्या परस्पर बराबर आहेत, त्या वर्तुळ मध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत; आणि जा ज्या वर्तुळमध्यापासून बराबर अंतरानें आहेत, त्या परस्पर बराबर आहेत.



अबडक⊙त अब आणि कड यादोन ज्या बराबर आहेत, तर त्या ई ⊙ मध्यापासून बराबर अंतरानें होतील. अ॰ बराबर अंतरानें असतील, तर अब = कड होईल.

आतां ई⊙ मध्यापासून अब, कड ज्यांवर ईफ, ईग लंब कर. अई, कई सांध. (३बु॰३सि॰म॰) अफ = बफ (१बु॰४७सि॰म॰) अफई आणि ईगक हे दोन △ एकरूप ∴ फई = गई.

याचे उलट अफई आणि ईगक यादोन का॰△त फई = गई आहे ∴ (१बु॰४७सि॰म॰) अफ = कग ∴ (६म॰म॰) अब = कड हें सिद्ध.

पंधरावा सिद्धांत.

व्यास सर्व ज्या मध्यें मोठा असतो. आणि जी ज्या वर्तुळ मध्या चे जवळ असते, ती जी लांब असते, तिजपेक्षां मोठी असते.



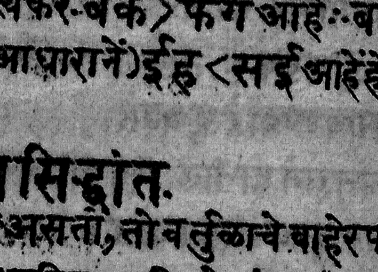
अबकड ⊙ चा अड व्यास आहे त्याचे जवळ ची ज्या बक आणि दूरची फग आहे; तर अड> बक आणि बक > फग होईल.

आतां ई ⊙ मध्यापासून ईफ ईग ईब हे बिंदु सांध. आणि मध्यापासून दोन ज्यांवर ईस, ईह लंब कर. (१ बु॰ २० सि॰ प्र॰) (बई + कई) अ॰ अड > बक आहे. आतां फसई आणि ईहब या दोन का॰ △ त बई = फई, सई > ईह गृहित आहे ∴ (१ बु॰ ४७ सि॰ प्र॰) बह > फस आहे; तेव्हां बक > फग आहे. हें सिद्ध.

याचे उलट बक ज्या > फग ज्या आहे; तेव्हां ती ⊙ मध्यापासून जवळ होईल. पूर्वीं प्र॰ कृत्य कर. बक > फग आहे ∴ बह > फस आहे. (१ बु॰ ४७ सि॰ चे आधारानें) ईह < सई आहे हें सिद्ध.

सोळावा सिद्धांत.

व्यासाचे टोंकावर लंब केला असतां, तो वर्तुळाचे बाहेर पडतो; व त्याशिवाय दुसरी रेघ परिघ आणि तो लंब यांचा मध्यें काढिली तर, वर्तुळास छेदिल्यावांचून रहाणार नाहीं.



अबक ⊙ चा व्यास अब आणि मध्य ड आहे; तर अब व्यासाचे अ शेवटावर अई लंब केला असतां, तो ⊙ चे बाहेर पडेल. आणि तो लंब व व्यास यांचा मध्यें व्यासाचे अ शेवटापा

सूनरेघ काढिली असतां ○ स छेदील.

कारण अई लंबांत कोठें ही एक फ बिंदु घेऊन फड सांध. (१ बु. ३२ सि. प्र.) < अ > < अफड आहे ∴ (१ बु. १९ सि. प्र.) अड त्रिज्येहून डफ बाजू मोठी आहे; तेव्हां फ बिंदु ○ बाहेर आहे ∴ अई रेघ वर्तुळाचे बाहेर आहे हें सिद्ध.

पुनः अई लंब आणि अबक ○ यांमध्यें अब व्यासाचे अ टोंका पासून अग रेघ काढिली ती ○ स छेदील.

अ टोंकापासून का॰ हून लहान कोन करणारी अग रेघ कर. आणि तिजवर ○ मध्या पासून डह लंब कर. अडह का॰ △त (१ बु. ३२ सि. प्र.) < डहअ > < अडह आहे ∴ (१ बु. १९ सि. प्र.) अ—ड > ड—ह आहे ∴ ह बिंदु ○ न आहे; ∴ अग रेघ ○ स छेदिते हें सिद्ध.

कु॰ जी रेघ त्रिज्येचे बाहेरील शेवटावर लंब आहे, ती त्या वर्तुळास स्पर्श रेघ आहे.

सत्रावा सिद्धांत.

वर्तुळ परिघाचा बाहेरील बिंदू पासून वर्तुळास स्पर्श रेघ करावयाची.



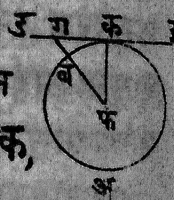
बकड ○ स अ बिंदू पासून स्पर्श रेघ करावयाची.

ई ○ मध्य आणि अ बिंदु साधून, ईअ त्रिज्येनें अफग ○ कर, आणि अई रेघेवर ड स्थळीं डफ लंब करून ईफ, अब सांध. ईबअ आणि डईफ या दोन △त अई = ईफ, डई = डब आणि < ई साधारण ∴ (१ बु. ४ सि. प्र.) हे दोन △ एकरूप

∴ <ड = <ब; परंतु <ड का० आहे ∴ <ब का० आहे, ∵ (३बु०१६ सि०प्र०) अब स्पर्शरेघ आहे. हें सिद्ध.

अठरावासिद्धांत. ह० ४७

स्पर्शरेघेवर स्पर्शस्थळ आणि मध्यबिंदु सांधणारी रेघ लंब आहे.

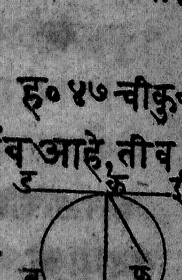


अबक ⊙ स डकई स्पर्शरेघ आहे, तर फ मध्यबिंदु आणि क स्पर्शस्थळ सांधिलें असतां फक, डई वर लंब होईल.

आतां फक लंब नाहीं असें मानिल्यास, फग लंब आहे असें मान. फगक याका० △त <ग > <क आहे ∴ (१बु०१९सि०प्र०) कफ > फग आहे; परंतु फग चा तुकडा फब = फक आहे, आणि सर्व फग < फक आहे. हें होणें परम अशक्य ∴ फकच लंब आहे. हें सिद्ध.

एकुणिसावासिद्धांत. ह० ४७ चीकु०

जी रेघ वर्तुळाचे स्पर्शरेघेवर स्पर्शस्थळीं लंब आहे, ती वर्तुळ मध्यांतून जाते.



अबक ⊙ त क स्पर्शस्थळीं डई स्पर्शरेघेवर अक लंब आहे; तर ती ⊙ मध्यांतून जाईल.

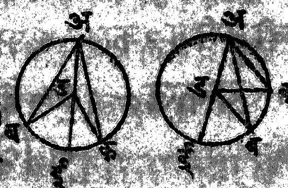
जर मध्यबिंदु अक रेघेंत नाहीं, तर बाहेर कोठें ही फ स्थळीं आहे असें मानून, फक सांध. (३बु०१८सि०प्र०) डई वर फक लंब आहे ∴ <फकई का० आहे; परंतु (प्रतिज्ञेंत सांगि०प्र०) <अकई का० आहे ∴ <अकई = <फकई यांत तुकडा सर्व वस्तू बराबर होतो, हें अशक्य ∵ मध्य बिंदु अक रेघेचे बाहेर-

हें सिद्ध.

कु॰ वर्तुळमध्यापासून स्पर्शरेघेवर लंब केला असतां स्पर्शबिंदूंतून जातो.

विसावासिद्धांत. ह॰ ५१

एका वर्तुळांत मध्यकोन आणि परिघकोन एका कौंसावर असतील, तर मध्यकोन परिघकोनाच्चे दुप्पट आणि परिघकोन मध्यकोनाचे अर्धा बराबर होईल.



अबक○ तअ परिघकोन आणि ड मध्यकोन हे एकाच्च बक कौंसावर आहेत, तर<ड=२<अ अ॰ २ <ड = <अ होईल.

आतां अ,ड बिंदु सांधून, ती रेघ परिघापर्यंत वाढीव; तर (१बु॰५ आणि ३२सि॰म॰) २<बअड = <बडई तसेंच २<कअड =<कडई ∴ (२म॰ज॰) २<अ = <ड हें सिद्ध.

एकविसावासिद्धांत. ह॰ ५०

जे कोन एका वर्तुळखंडांत असतात, ते परस्पर बराबर असतात.

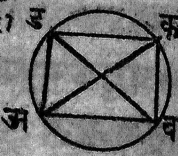


अबकडई○ चा बअईड खंडांत अ आणि ई कोन आहेत, ते परस्पर बराबर आहेत.

आतां त्याच्च खंडांत फ मध्यकोन कर. (२बु॰२०सि॰म॰) <फ =२<अ आणि <फ=२<ई ∴ (७म॰म॰) <अ=<ई हें सिद्ध.

बेविसावासिद्धांत. ह॰ ५४

वर्तुळांतील चौकोनाच्चे समोरासमोरच्चे दोन कोनांची बेरीज दोन काटकोना बराबर आहे.

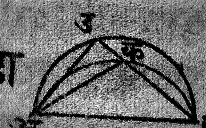


अबकड० त अबकड चौकोन केलें आहे, तर त्याचे समोरासमोरचे ∠अ + ∠क अ० ∠ब + ∠ड = २का० होतील.

अ,क ब,ड बिंदु सांध. (३बु० २१सिं०प्र०) ∠अडब = ∠अकब तसेंच ∠कडब = ∠कअब ∴ ∠अडक = ∠बअक + ∠अकब यां बरोबरींत ∠अबक मिळीव; तर ∠अडक + ∠अबक = ∠कअब + ∠अकब + ∠अबक (१बु० ३२सिं०प्र०) याबरोबरीचे तीन कोनांची बेरीज २का० ∴ ∠अडक + ∠अबक = २का० तसेंच ∠बअड + ∠बकड = २का० हें सिद्ध.

तेविसावा सिद्धांत.

एका रेघेवर तिचे एकाच अंगास वर्तुळाचे दोन सजातीय खंड कदापि निराळे रहावयाचे नाहींत.



रहातील असें मानिल्यास अडब० खंडाचे आंत अकब खंड पडेल असें मान.

आतां बकड रेघ काढून अ,ड अ,क सांध. (४९व्या०प्र०) ∠ड = ∠क, परंतु (१बु० १६सिं०प्र०) ∠क > ∠ड आहे; तर एक वेळ बराबर आणि एक वेळ मोठा हें अशक्य ∴ ते खंड निराळे रहावयाचे नाहींत हें सिद्ध.

चौविसावा सिद्धांत.

वर्तुळाचे सजातीय खंड समान रेघांवर असतात, ते परस्पर बराबर असतात.



अईब आणि कफड हे दोन सजातीय खंड अब आणि कड या दोन समान रेघांवर अस

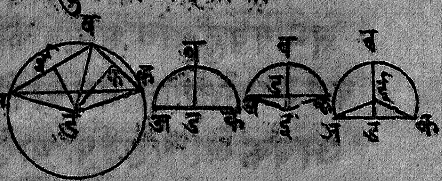
ळते परस्पर बरावर होतील.

आतां अबई आकृति कडफ आकृतीवर ठेविली, तर (३बु. २३सि०प्र०) या एकत्र मिळतील ∴ हे दोनही खंड बरावर आहेत हें सिद्ध.

पंचविसावासिद्धांत.

दिलेल्या वर्तुळ खंडापासून त्याचें वर्तुळ काढावयाचा.

अबक ⊙खंडाचें ⊙ काढ.



आतां परिघांतील कोणत्याही ब बिंदूपासून बअ, बक या दोन ज्या करून, त्या दुभागून, दुभागस्थळीं लंब कर. ते लंब जा स्थळीं परस्परांस छेदितील तोड बिंदु ⊙ मध्य होय.

अड, बड, कड सांध. (१बु. ४सि०प्र०) अड = बड आणि बड = कड ∴ (१प्र०प्र०) अड = बड = कड ∴ (३बु. ९सि०प्र०) ड हा त्या ⊙ चा मध्य आहे हें सिद्ध.

सविसावासिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान कोन समान कौंसांवर असतात. ते परिघकोन असोत, अथवा मध्यकोन असोत.



अबक आणि डईफ या दोन ⊙ ब ग मध्यकोन = ह मध्यकोन, आणि अ परिघकोन = ड परिघकोन आहेत; तर बसक आणि ईलफ हे कौंस बरावर होतील.

बक, ईफ सांध. बग, गफ आणि ईह, हफ या समान ⊙ चा त्रिज्या ∴ परस्पर बराबर आहेत. गबक आणि हईफ हे दोन △

(१बु॰ ४सि॰ म॰) एकरूप आहेत ∴ बक = ईफ आहे. अ परिघकोन ड परिघकोना बराबर आहे ∴ (४९ व्या॰ म॰) बअक आणि ईलफ ⊙ खंड सजातीय आणि समान रेघांवर आहेत; ∴ (३ बु॰ २४ सि॰ म॰) ते परस्पर बरोबर आहेत ∴ बसक आणि ईलफ हे कौंस बराबर आहेत. हें सिद्ध.

सत्ताविसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान कौंसांवर जे कोन असतात, ते परस्पर बराबर असतात. ते मध्यकोन असोत अ॰ परिघकोन असोत.



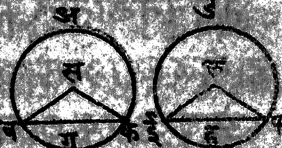
अबक आणि डईफ या दोन समान ⊙त ग, ह हे दोन मध्यकोन, आणि अ, फ हे दोन परिघकोन बसक आणि ईलफ या दोन समान कौंसांवर आहेत; तर ∠अ = ∠ड आणि ∠ग = ∠ह होतील.

आतां ∠ग = ∠ह असेल, तर (३ बु॰ २० सि॰ म॰) ∠अ = ∠ड होईल; परंतु ∠ग = ∠ह नसेल, तर कोणता तरी एक मोठा आहे, एथें ∠ग मोठा आहे असें मान, आणि ∠ह बराबर कोन करणारी ग बिंदूपासून गस रेघ कर. तर ∠ह = ∠बगस आहे ∴ (३ बु॰ २६ सि॰ म॰) बस कौंस = ईलफ कौंस; परंतु (प्रतिज्ञेप्र॰) बक कौंस = ईफ कौंस आहे ∴ (१ म॰ म॰) बस कौंस = बक कौंस ते ह्मणजे लहान कौंस मोठे कौंसा बराबर होणें अशक्य ∴ ∠ग = ∠ह आणि ∠अ = ∠ड हें सिद्ध.

अठ्ठाविसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान ज्या समान कौंस करितात; महत्तर कौं

समहत्तर कौंसाबरोबर होतो, आणि लघुतर कौंस लघुतर कौंसा बरोबर होतो.



अबक आणि डईफ हीं दोन समान ⊙ आणि बक आणि ईफ या दोन समान ज्या आहेत, तर बगक कौंस = ईहफ कौंस आणि बअक कौंस = ईडफ कौंस आहे.

स आणि ल ⊙ मध्यांपासून सब, सक आणि लई, लफ यांनी ज्या कर. बसक आणि ईलफ हे दोन △ (१बु॰ ८ सि॰ म॰) एकरूप ∴ ∠स = ∠ल तेव्हां (२बु॰ २६ सि॰ म॰) बगक कौंस = ईहफ कौंस. हें सिद्ध.

एकुणतिसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत समान कौंसांच्या ज्या समान असतात.

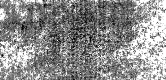
मागील आकृतीवर दृष्टि ठेव.

बसक आणि ईलफ या दोन △ त एकाचा बस, कस बाजू दुसऱ्यांच्या ईल, ईफ बाजूंचे बराबर व (२बु॰ २७ सि॰ म॰) ∠स = ∠ल ∴ हे दोन △ (१बु॰ ४ सि॰ म॰) एकरूप ∴ फक ज्या = ईफ ज्या हें सि॰

तिसावा सिद्धांत.

दिलेला कौंस दुभागावयाचा.

अडब कौंसाचे दोन समान भाग करावयाचे.

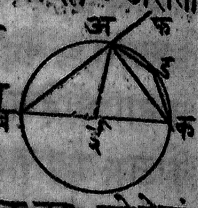


त्या कौंसाचीं अ आणि ब दोन टोकें सांधून ती रेघ दुभागून, दुभागस्थळीं कड लंब कर. आणि अड, बड सांध. अकड आणि बकड हे दोन △ (१बु॰ ४ सि॰ म॰) एकरूप ∴ अड = बड आहे ∴ (३बु॰ २८ सि॰ म॰) अड कौंस = बड कौंस हें सिद्ध.

एकतिसावा सिद्धांत.

अर्धवर्तुळांतील कोन का॰ असतात; अर्धवर्तुळापेक्षां मोठे खंडांतील लघु असतात, आणि लहान खंडांतील विशाळ असतात.

अबक एक ⊙ आंत बक व्यास त्याचे दोन समान भाग करीत आहे, आणि अक रेघ त्याचे दोन विषम भाग करीत आहे ब,अ अ,ड क,ड बिंदु सांध. तर अर्धवर्तुळांतील <बअक का॰, मोठे खंडांतील <ब लघु आणि लहान खंडांतील <ड विशाळ होईल.



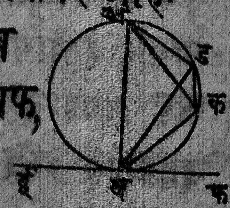
अई सांधून अब, फ पर्यंत वाढीव, तर बई=अई ∴ (१बु॰ ५सि॰प्र॰) <ब=<बअई तसेंच अई=ईक ∴ <अकई = <ईअक ∵ <बअक=<ब+<अकब (१बु॰३२सि॰प्र॰) <ब+<अकब=<फअक (१प्र॰प्र॰) <बअक=<फअक ∴ (११व्यां॰प्र॰) <बअक का॰ आहे. आतां अबक △त <बअक का॰ आहे ∴ <ब लघु आहे.

आतां अबकड ⊙ त अबकड चौबाजू आहे, तेव्हां (२बु॰२२ सि॰प्र॰) <ब+<अडफ=२ का॰ परंतु <ब लघु आहे ∵ <ड विशाळ आहे. हें सिद्ध.

बत्तिसावा सिद्धांत. ह॰५३

वर्तुळाची स्पर्शरेघ आणि स्पर्शस्थळापासून केलेली ज्या यांपासून जो कोन होतो तो व्युत्क्रम खंडांतील कोना बराबर आहे.

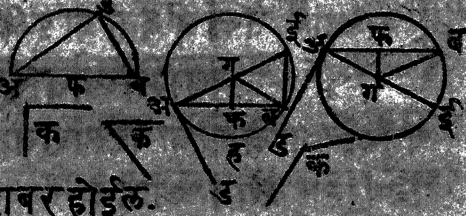
अबक ⊙ स ईफ स्पर्शरेघ आहे, आणि ब स्पर्शस्थळापासून बक ज्या केली, तर <कबफ, व्युत्क्रम खंडांतील <ड बराबर होईल.



ईफ वर ब स्थळीं अब लंब करून परिघा पर्यंत वाढीव. तो लंब (३बु० १९सि०प्र०) व्यास आहे. अक सांध. (३बु० ३१सि० प्र०) <अकब का० आहे ∴ (१बु० ३२सि०प्र०) <अबक + <बअक = १का० आणि ईफ वर अब लंब आहे ∴ <अबफ = १का० यांत साधारण <अबक आहे; तो वजा करून <अ = <कबफ परंतु (३बु० २२सि०प्र०) <अ = <ड तेव्हां <कबफ = <कडब हें सिद्ध.

तेतिसावासिद्धांत.

ज्यांतील कोन दिल्या कोना बराबर होईल, असा एक वर्तुळखंड दिले रेघेवर करावयाचा.

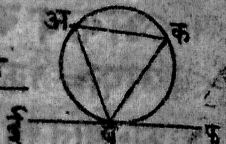


अब रेघेवर असा एक खंड करावयाचा कीं, ज्यांतील कोन दिले क कोना बराबर होईल.

अब रेघेंतील अ बिंदू पासून <क बराबर कोन करणारी अड रेघ करून, तिचेवर अ स्थळीं अई लंब कर, आणि अब, फ स्थळीं दुभागून, फग लंब कर. तो लंब ग स्थळीं अग रेघेस मिळेल; नंतर बग सांध. अगफ आणि बगफ हे दोन △ (१बु० ४सि० प्र०) एकरूप ∴ अग = बग आहे ∴ अग त्रिज्येनें अईबह ○ केलें, तर तें ब बिंदूंतून जाईल. अग, परिघावर ई पर्यंत वाढवून, ब, ई सांध. (३बु० १६सि०प्र०) अड त्या ○ स स्पर्शरेघ आहे ∴ (३बु० ३२सि०प्र०) <ई = <बअड; परंतु कृत्यानें <बअड = <क आहे ∴ (१प्र०प्र०) <ई = <क आहे; तेव्हां अब रेघेवर अईब हा ○ खंड झाला. हें सिद्ध.

चवतिसावासिद्धांत.

दिलेल्या वर्तुळाचा असा एक खंड पाड कीं, जांतील कोन दिलेल्या कोना बरा बर होईल.



अबक ⊙ चा असा एक खंड पाड कीं, जां 

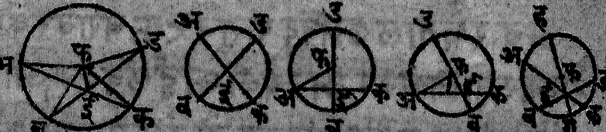
तील कोन दिलेल्या ड कोना बरा बर होईल.

दिलेल्या ⊙ स ईफ स्पर्श रेघ करून, तिशीं स्पर्श बिंदू स्थळीं ∠ड बरा बर कोन करणारी बक ज्या कर, आणि व्युत्क्रम खंडांत परिघावर एक बिंदु घेऊन, अ,ब अ,क सांध; तर (३ बु॰ ३३ सि॰ प्र॰) ∠फबक=∠अ आणि ∠फबक= ∠ड आहे ∴ (१ प्र॰ म॰) ∠ड =∠अ आहे; तेव्हां बइक हा इच्छिला ⊙ खंड आहे. हें सिद्ध.

पस्तिसावासिद्धांत. ह॰ ६१

वर्तुळांत जा दोन रेघा परस्परांस छेदितात, त्यांचे खंडांचे का॰ ही॰ परस्पर बरा बर आहेत.

अबकड ⊙ त अक आणि बड या दोन ज्या परस्परांस छेदितात; तर अई॰ ईक = बई॰ ईड होईल.

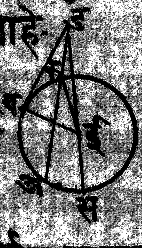


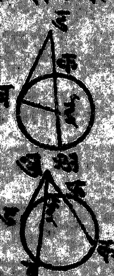
आतां फ ⊙ मध्या पासून बफ, फक, अफ, फड रेघा कर, आणि फ,ई सांध. (२ बु॰ ड सि॰ प्र॰) अफ² − ईफ² = अई॰ ईक आणि बफ² अ॰ अफ² − ईफ² = बई॰ ईड ∴ (१ प्र॰ प्र॰) अई॰ ईक= बई॰ ईड हें सिद्ध.

छत्तिसावासिद्धांत. ह॰ ६१ कु॰ १

कोणत्याही वर्तुळास एका बिंदूंतून एक स्पर्शरेघ व एक छेदन

रेघ केली तर, ती छेदनरेघ आणि तिचा वर्तुळाबाहेरील खंड यांचा का॰ चौ॰, स्पर्शरेघेचा वर्गाबरोबर आहे.





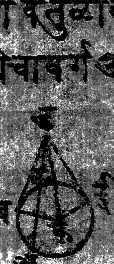
अबक एक ० आहे, त्यास ड बिंदू पासून बड स्पर्शरेघ व अड छेदनरेघ केली, तर बड^2 = अड॰कड होईल.

ड बिंदू पासून डई स व्यास करून, ई मध्यापासून फई, अड वर लंब कर आणि कई बई सांध. (२ बु॰ १८ सि॰ प्र॰) ८ब का॰ आहे ∴ (१ बु॰ ४७ सि॰ प्र॰) डई^2 = बड^2 + बई^2 (२ बु॰ ५ सि॰ प्र॰) डफ^2 = अड॰कड + कफ^2 यांत फई^2 मिळवून, डफ^2 + ईफ^2 = अड॰कड + कफ^2 + फई^2 यांत (१ बु॰ ४७ सि॰ प्र॰) किंमत लिहून, डई^2 = अड॰कड + कई^2 अ॰ बई^2, डई^2 चा दोनही किंमती बरोबर करून, बड^2 + बई^2 = अड॰कड + बई^2 स्थ॰क॰ बड^2 = अड॰कड हें सिद्ध.

क्रु॰ वर्तुळास एका बिंदू पासून दोन छेदनरेघा केल्या असता एकीचे अवयवांचा का॰ चौ॰ दुसरीचे अवयवांचे का॰ चौ॰ बरोबर आहे.

सततिसावासिद्धांत.

वर्तुळाबाहेरील एका बिंदू पासून वर्तुळास मिळेपर्यंत एक रेघ केली आणि एक छेदनरेघ केली, जर छेदन रेघ व तिचा वर्तुळाबाहेरील भाग यांचा का॰ चौ॰ बरोबर त्या मिळणाऱ्या रेघेचा वर्ग असेल तर, ती त्या वर्तुळास स्पर्शरेघ होईल.



अबकई ० बाहेरील ड बिंदू पासून ० समिळेपर्यंत बड रेघ केली, आणि डअक छेदनरेघ

केली; अशीकीं, बडै = अड·कड होईल, तर बड त्या ⊙ सस्पर्श रेघ होईल.

अबकई ⊙ सड बिंदूपासून दुसरे बाजू सडई स्पर्शरेघ कर. आणि फ ⊙ मध्यापासून फब फड फई सांध. (२बु·१०सि·म·) <ड का· आहे आणि (३बु·२६सि·म·) डई = अड·कड आहे. व बई = अड·कड गृहित आहे ∴ बड = डई आहे. व फड आणि फईड या दोन △त (१बु·नसि·म·) <ई = <ब आहे; परंतु <ई का· आहे ∴ <ब का· आहे ∵ (३बु·१६सि·म·) बड रेघ अबक वर्तुळाची स्पर्शरेघ आहे हें सिद्ध.

कु· एका बिंदूपासून वर्तुळास दोन स्पर्शरेघा केल्या, तर त्या परस्पर बरावर आहेत.

तिसऱ्या बुकाचे प्रश्न.

१ जी रेघ वर्तुळमध्यांतून जाऊन, कोणत्याही ज्येस लंबानें दुभागिते; ती तिशीं स· असणाऱ्या दुसऱ्या ज्येसही लंबानें दुभागील.

२ परस्पर छेदणाऱ्या वर्तुळांचे मध्य सांधणारी व छेदन बिंदु सांधणारी या रेघा परस्परांस लंबानें दुभागितात.

३ परस्पर छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांचे एका छेदन बिंदूपासून दोन वर्तुळांत व्यास केले, आणि त्यांचीं शेवटें सांधिलीं; तर त्या रेघेंत दुसरा छेदन बिंदु येईल.

४ वर्तुळांत दोन स· ज्यांस दुभागणारी रेघ त्यांजवर लंब असते.

५ दोन समकेंद्र वर्तुळांस छेदणाऱ्या रेघेचे त्या वर्तुळांमध्यें जे दोन खंड पडतात ते, परस्पर बरावर आहेत.

६ वर्तुळमध्यांतून जाणें, ज्येस दुभागणें, ती वर लंब होणें, मध्य

कोनास दुभागणें, आणि ज्या कौंसास दुभागणें या पांच गुणांतून दोन गुण ज्या रेषेचे अंगीं असतात, तिचे अंगीं बाकी तीनही गुण असतात.

७ एका वर्तुळाचे त्रिज्येवर दुसरें वर्तुळ केलें असतां, त्याचा स्पर्शबिंदूपासून दुसरे वर्तुळांत एक ज्या केली; तर ती ज्या दुसरे वर्तुळाचे परिघ स्थळीं दुभागिली जाईल.

८ वर्तुळांतील चौकोनाची एक बाजू बाहेर वाढविली असतां, बाहेरील कोन त्याचे आंतिलाचे समोरचे कोना बरोबर आहे. ह० ५५

९ वर्तुळांत दोन ज्या परस्पर स० केल्या असतां, त्यांचे अंतरांतील कौंस परस्पर बरोबर होतात. - - - - - - - - ह० ५६

१० जेव्हां एक वर्तुळ दुसरे वर्तुळास आंतून स्पर्श करतें, अ० दोन वर्तुळें परस्पर बाहेरून स्पर्श करितात; तेव्हां त्यांचा स्पर्शबिंदूतून जाणाऱ्या रेषा वर्तुळास मिळे पर्यंत वाढवून, त्यांचीं शेवटें सांधिलीं असतां, शेवटें सांधणाऱ्या ज्या स० होतात.

११ वर्तुळाची स्पर्शरेष आणि त्याच वर्तुळांतील ज्या या परस्पर स० असतील; तर त्याचे अंतरांतील कौंस परस्पर बरोबर होतील. - - - - - - - - - - - ह० ५७

१२ दोन समकेंद्र वर्तुळामध्यें मोठे वर्तुळाची ज्या लहान वर्तुळास स्पर्शरेष आहे, तर ती ज्या त्या स्पर्शबिंदू स्थळीं दुभागिली जाईल.

१३ दिलेल्या वर्तुळास छेदणारीं, व दिलेल्या दोन बिंदूंतून जाणारीं अशीं कितीही वर्तुळें केलीं; तर त्या वर्तुळांचे छेदन बिंदु सांधणाऱ्या रेषा एका बिंदूस्थळीं मिळतील.

१४ दिलेले दोन बिंदूंतून जाऊन, दिलेले वर्तुळास स्पर्श करील,

असें एक वर्तुळ काढावयाचें.

१५ वर्तुळांत जा दोन ज्या एकमेकींवर लंब असून, परस्परांस छेदितात, त्या ज्यांच्या चार खंडांच्या वर्गांची बेरीज, व्यासाचे वर्गा बरोबर होते.

१६ वर्तुळांतील व्यासाच्या शेवटां पासून जर एका ज्येवर लंब केले, तर त्या ज्येचे वाढविलेले लंबा पर्यंत खंड बराबर होतात.

१७ शिरकोन, पाया, आणि उंची हीं दिलीं आहेत; तर त्यां पासून त्रिकोण कर.

१८ जर वर्तुळांतील कोणत्ये ही ज्येशीं स० व्यास करून, त्या ज्येच्या दोन ही शेवटां पासून व्यासांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत रेघा केल्या, तर त्यांच्या वर्गांची बेरीज, व्यासाच्या दोन खंडांच्या वर्गांच्या बेरजे बराबर होईल.

१९ त्रि० चा शिरकोन, पाया आणि दुसऱ्या दोन बाजूंची बेरीज इतकीं समजलीं असतां, त्यांपासून त्रि० काढावयाचा.

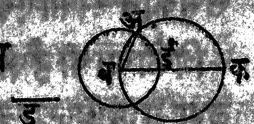
२० जर एका बिंदू पासून वर्तुळास दोन स्पर्शरेघा केल्या, आणि त्यांचे स्पर्शबिंदु सांधून, पूर्वीचा बिंदू पासून त्या वर्तुळास एक छेदन रेघ केली, तर त्या छेदनरेघेचे जे तीन खंड पडतात ते, या प्रमाणांत होतात कीं, ती छेदनरेघ व मधील खंड यांचा का० चौ० राहिल्या दोन खंडांच्या का० चौ० बराबर होतो.

२१ वर्तुळांतील चौ० च्या समोरासमोरच्या बाजू वाढविल्या असतां, त्या जा बिंदूंस मिळतात, त्यांस सांधणाऱ्या रेघेचा वर्ग; त्या बिंदू पासून वर्तुळास दोन स्पर्शरेघा केल्या असतां, त्यांच्या वर्गांच्या बेरजे बराबर होतो.

वूक च्वथें.

मथमसिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत व्यासापेक्षां मोठी नाहीं, अशी दिले रेघे एवढी रेघ करावयाची.

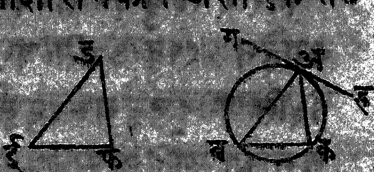


अबक ⊙ त दिलेल्या ड रेघे एवढी रेघ करावयाची.

अबक ⊙ चा व्यासाचा ब टोंक मध्य मानून, ड त्रिज्येनें अईफ ⊙ कर, आणि अब सांध. आतां ड = बई आणि बई = अब ∴ (१ प्र॰ म॰) ड = अब हें सिद्ध.

दुसरा सिद्धांत. कृत्य.

दिलेल्या वर्तुळांत दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोन असा एक संलग्न त्रिकोण करावयाचा.

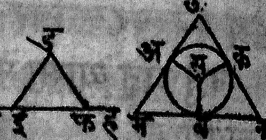


अबक ⊙ त संलग्न डईफ △ शीं समकोन असा △ करावयाचा.

अबक ⊙ सह अग एक स्पर्शरेघ करून अ स्पर्शस्थळीं अह शीं ईकोनाबरावर कोन करणारी अक रेघ कर. तसेंच अग शीं फ-कोनाबरावर कोन करणारी अब रेघ कर. बक सांध. तर अबक हा इच्छिला त्रि॰ झाला. कारण (२ बु॰ ३२ सि॰ म॰) <गअब = <क आहे. <हअक = <ब ∴ (१ म॰ म॰) <क = <फ आणि <ब = <ड आतां ईडफ आणि अबक हे दोन △ (१ बु॰ ३२ सि॰ कु॰ म॰) समकोन आहेत, तेव्हां अबक ⊙ त डईफ △ शीं समकोन आणि संलग्न असा अबक त्रि॰ झाला हें सिद्ध.

तिसरासिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळा भोंवती दिलेल्या त्रिकोणाशीं समकोन असा एकत्रिकोण करावयाचा.



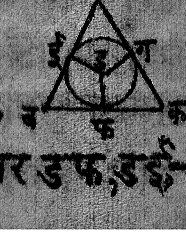
अबक ⊙ भोंवती संलग्न डईफ△शीं समकोन असा एकत्रिकोणकरावयाचा.

त्रिकोणाची ईफ बाजू दोहोंकडे ग,ह पर्यंत वाढीव, आणि ⊙त बस एकत्रिज्या कर, व तिशीं ⊙मध्यापासून एकीकडे ∠गईड चे बराबर आणि दुसरीकडे ∠डफह चे बराबर कोन करणाऱ्या अस, कस रेघा कर, आणि (३बु·३७सि·प्र·) अ,ब,क या तीन बिंदूंतून लम, मन, नल स्पर्श रेघा कर· यांपासून लमन हा इच्छिला त्रि· झाला·

कारण (३बु·१८सि·प्र·) अ,ब,क यास्थळांवरील कोन का· आहेत ∴ (१बु·३२सि·प्र·) ∠म + ∠असब = २का· आणि (१बु·१३सि·प्र·) ∠डईग + ∠डईफ = २का· आहेत· या दोन बरोबऱ्यांत साधारण ∠असब = ∠डईग वजा करून, (३म·म·) ∠म = ∠डईफ तसेंच ∠न = ∠डफई ∴ (१बु·३२सि·प्र·) मनल आणि डईफ हे दोन △ समकोन आहेत; तेव्हां दिलेल्या ⊙भोंवती सांगितले △शीं समकोन लमन △ झाला· इ॰ सिद्ध·

चवथासिद्धांत. कृत्य. ह॰ कृ॰ २०

त्रिकोणांत त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.



अबक △ त त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

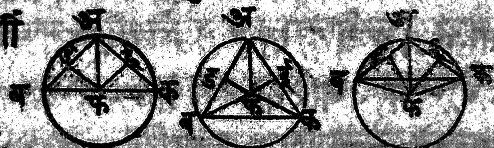
△चे ब आणि क कोन बड, कड रेघांनीं दुभाग, आणि त्याचे ड छेदनबिंदूपासून तीनही बाजूंवर डफ, डई–

डग लंब कर. बडई आणि बफड हे दोन △ (१ कु. २६ सि. क्र.) एकरूप ∴ डई = डफ तसेंच डफ = डग ∴ (१ स. म.) डई, डफ डग परस्पर बराबर ∴ डई, डफ, डग यांतून एक त्रिज्या मानून, केलेलें ⊙ दिले त्या △ शीं संलग्न आहे. हें उघड आहे.

पांचवा सिद्धांत. कृत्य.

त्रिकोणाच्या बाहेर त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

अबक △ बाहेर त्याशीं संलग्न ⊙ करावयाचें.

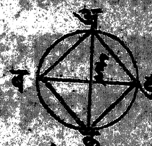


अब, अक दुभागून, दुभागस्थळीं लंब कर. ते फ स्थळीं परस्परांस छेदितील, त्या बिंदूपासून फअ, फब, फक रेघा कर. या रेघा त्या ⊙ च्या त्रिज्या आहेत. कारण अडफ, बडफ हे दोन △ (१ कु. ४ सि. प्र.) एकरूप ∴ अफ = बफ तसेंच अफ = कफ ∴ (१ स. म.) अफ, बफ, कफ परस्पर बराबर आहेत ∴ यांतून एक त्रिज्या मानून ⊙ केलें असतां तें △ शीं संलग्न होईल. हें उघड आहे.

कृ. त्रिकोणाच्या सभोंवती संलग्न ⊙ च्या मध्यबिंदु △ त पडला असतां तीनही कोन लघुकोन असतात. बाजूंत पडला असतां त्या बाजू समोरील कोन का. असतो. आणि बाहेर पडला असतां जा बाजूच्या बाहेरील अंगास तो मध्य असतो, त्या बाजू समोरील कोन विशाळ असतो. अ. याचें उलट. लघुकोन त्रि. असल्यास मध्यबिंदु त्रि. त पडेल. का. त्रि. असल्यास कर्णरेघेंत पडेल. आणि विशाळकोन △ असल्यास मध्यबिंदु विशाळकोना समोरच्या बाजूचे पलीकडील अंगास पडेल.

सहावासिद्धांत. ह॰ कृ॰२३

वर्तुळांतत्याशीं संलग्न चौरसकरावयाचें.



अबकड०त त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचें
अबकड ०त अक ,बड हे दोन व्यास परस्प
रांवर लंब कर. आणि अ,ब ब,क क,ड ड,अ बिंदु सांध. (१बु॰
४सि॰प्र॰)अईब,अईड, कईब, कईड हे △ एकरूप आहे
त ∴ अब बक कड डअ बाजू बराबर आणि (३ बु॰ ३१सि॰
प्र॰) ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड हे चारही कोन का॰ आहेत∴ अबक
ड चौरस आहे हें सिद्ध.

सातवासिद्धांत. ह॰ कृ॰२४

वर्तुळाबाहेर त्याशीं संलग्न चौरस करावयाचें.

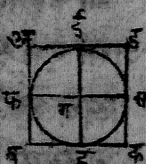


अबकड वर्तुळाबाहेर त्याशीं संलग्न चौरस
करावयाचें.
अक, बड हे दोन व्यास परस्परांवर लंब कर.
आणि अ,ब,क,ड या बिंदूस्थळीं० सफ,गग ह, हस, सफ या
चार स्पर्शरेघा कर. (३ बु॰ १८ सि॰ प्र॰) अ,ब,क,ड बिंदूंजवळी
ल कोन का॰ आहेत व व्यास परस्परांवर लंब आहेत∴ ई स्थळा
वरील कोन का॰ आहेत (१ बु॰ २८ सि॰ प्र॰) गह, फस रेघा अक
शीं स॰ आहेत. व गफ, हस रेघा बड शीं स॰ आहेत. गह,
फस शीं आणि गफ, हस शीं स॰ आहेत (१ बु॰ ३४ सि॰
प्र॰) गफ=हस आणि गह=फस आहे अक= बडआहे
∴ गफ, फस, सह, हग या सर्व बराबर आहेत. गईस॰ चौ॰त
∠ई का॰ आहे∴ ∠ग [illegible] आहे या प्र॰ गस आकृतीचे चार

हीकोन का॰ आहेत ∴ अबकड आकृति चौरस आहे. वर्ते अबकड ⊙ शीं संलग्न आहे. हें सिद्ध.

आठवा सिद्धांत. कृत्य. ह॰ कृ॰ २५

चौरसांत त्याशीं संलग्न वर्तुळ करावयाचें.



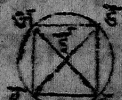
अबकड चौरसांत त्याशीं संलग्न ⊙ करावयाचें.

अब, अड बाजू दुभागून, त्या स्थळीं फस, ईह लंब कर. ते ग स्थळीं परस्परांस छेदितील.

अग, ईस, फह, गक हीं सर्व चौरसें असून, बराबर आहेत; कारण मुळच्या चौरसाच्या बाजू दुभागून लंब केले आहेत. आतां हीं चौरसें बराबर आहेत ∴ फग = ईग = गस = गह ∴ या रेषां तून एका रेषेनें ग मध्य करून केलेलें ⊙ चौरसांत त्याशीं संलग्न होईल; कारण (१ बु॰ २१ सि॰ म॰) फ, ई, स, ह या बिंदूजवळचे कोन का॰ आहेत ∴ (२ बु॰ १६ सि॰ म॰) अब, अड, डक, कब या अनुक्रमें स्पर्शरेषा आहेत, ∴ चौरसांत इच्छिलेलें ⊙ झालें. हें सिद्ध.

नववा सिद्धांत कृत्य. ह॰ कृ॰ २६

चौरसास भोंवती संलग्न वर्तुळ करावयाचें.



अबकड चौरस आहे, त्याबाहेर संलग्न ⊙ करावयाचें.

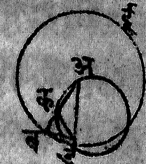
अक, बड या दोन कर्णरेषा कर. त्या ई स्थळीं परस्परांस दुभागितात. अई त्रिज्येनें अबकड ⊙ कर. तें चौरसास भोंवतीं इच्छिलें वर्तुळ होईल.

अकड आणि बकड या दोन ∆ त (१ बु॰ ४ सि॰ म॰) अक = बड आणि (२ बु॰ ३३ सि॰ कृ॰ म॰) अई = कई आणि बई = डई

∴ (७प्र०प्र०) अई, बई, कई, डई परस्पर बराबर ∴ त्या अबकड ⊙चा त्रिज्या आहेत. हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत. कृत्य. इं०क्र० २८

ज्याचा पाया कडील प्रत्येक कोन शिरकोनाचे दुप्पट होईल, असा एक समद्विबाजू त्रिकोण करावयाचा.



अब एक रेघ कर. आणि (२ बु० ११ सि०प्र०) तिला क स्थळीं अशी छेद कीं, अब·बक = अक² होईल.

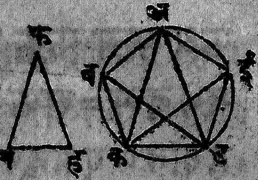
अ मध्य करून, अब त्रिज्येनें डईब ⊙ कर. आणि त्यांत अक रेघे एवढी ब बिंदूपासून बड ज्या कर. अ,ड क,ड सांध आणि अकड △ सभोंवती एक ⊙ कर. (कृत्यानें) अक = बड आहे ∴ अब·बक = बड² तेव्हां (३ बु० ३७ सि०प्र०) बड ही अकड⊙ची स्पर्शरेघ आहे ∴ (३ बु० ३२ सि०प्र०) ∠बडक = ∠अ यांत ∠अडक साधारण मिळविला असतां, ∠अ + ∠अडक = ∠अडब आणि (१ बु० ३२ सि०प्र०) ∠अ + ∠अडक = ∠डकब, ∠बडक + ∠अडक = ∠अडब ∴ ∠बकड = अडब (१ बु० ५ सि०प्र०) ∠ब = ∠अडब ∴ ∠ब = ∠बकड ∴ (१ बु ६ सि०प्र०) बड = कड परंतु बड = अक आहे ∴ कड = अक ∴ (१ बु० ५ सि०प्र०) ∠अ = ∠अडक आहे आणि (१ बु० ३२ सि०प्र०) ∠अ + ∠अडक अथवा २∠अ = ∠बकड अ० ∠बडअ हें सिद्ध.

अकरावा सिद्धांत. इं०क्र० २९

वर्तुळांत संलग्न समबाजू समकोण पंचकोणाकृति करावयाची.

अबकडई ⊙ त संलग्न समबाजू समकोण पंचकोणाकृति

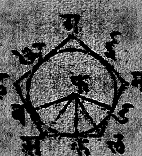
करावयाचें.



(४ बु०१०सि०प्र०) फगह △ कर असा कीं, त्याच्या पायाकडील प्रत्येक कोन शिर कोनाचे दुप्पट होईल. (४ बु०२सि०प्र०) अबकडई ⊙त फगह △शीं समकोण असा एक अकड △ कर आणि त्याचे पायाकडील ∠क आणि ∠ड, कई, डब रेषांनीं दुभाग, अब, बक, अ, ई ई, ड सांध. म्हणजे अबकडई ही समबाजू पंचकोणाकृति झाली. कारण ∠कअड = ∠कडब = ∠बडअ = ∠अकई = ∠ईकडआहे. तेव्हां त्यांचे कौंस ही (३ बु०२६सि०प्र०) परस्पर बराबर आहेत. ∴ (३ बु०२९ सि०प्र०) त्यांच्या ज्याही परस्पर बराबर आहेत ∴ अबकडई ही समबाजू पंचकोणाकृति आहे. आणि अब, बक, कड, डई, ईअ हे कौंस परस्पर बराबर आहेत; ∴ अबकड कौंस = बकडई कौंस आहे ∴ (३ बु०२७सि०प्र०) ∠बअई = ∠अईड आहे. याप्रमाणेंच ∠ड, ∠क आणि ∠ब हेही ∠बअई चे बराबर आहेत. ∴ अबकडई ही पंचकोणाकृति समकोण आहे हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत. ह०कृ०२१

वर्तुळा भोंवती संलग्न समबाजू समकोण पंचकोणाकृति करावयाचें.



अबकडई ⊙ च्या सभोंवती संलग्न समबाजू समकोण पंचकोणाकृति करावयाचें.

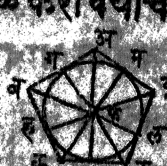
मागील सिद्धांता प्रमाणें त्या ⊙चे ५ भाग करून, त्या बिंदूंतून ⊙स सह, हग, गम, मल, लस स्पर्शरेषा कर. त्यापासून इच्छिली पंचकोणाकृति होईल.

फव फस फक फल फड बिंदुसांध. तेव्हां (२ बु॰ २७ सि॰ कु॰ म॰) बस = सक आहे. (१ बु॰ ८ सि॰ म॰) बफस आणि सफक हे दोन △ एकरूप ∴ <बफस = <सफक आणि <बसफ = <कसफ ∴ २<कफस = <कफब, २<कसफ = <कसब तसें च २<कफल = <कफड आणि २<कलफ = <कलड आहे; परंतु बक कौंस कड कौंसा बराबर आहे ∴ (२ बु॰ २७ सि॰ म॰) <बफक = <कफड आहे ∴ (७ म॰ म॰) <सफक = <कफल आहे ∴ (१ बु॰ २६ सि॰ म॰) सफक आणि कफल हे दोन त्रि॰ एकरूप आहेत ∴ २ सक = सल तसेंच २ बस = सह परंतु बस = सक आहे ∴ (६ म॰ म॰) सल = सह आहे. या प्रमाणेंच सर्व बाजू परस्पर बराबर आहेत. आणि (वरसिद्ध के॰ म॰) <फसक = <फलक आहे ∴ (६ म॰ म॰) <बसक = <फलड आहे. या प्रमाणेंच सर्व कोन परस्पर बराबर आहेत ∴ गहसलम ही पंचकोणाकृति ○ बाहेर संलग्न समबाजू समकोण आहे. हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत. कृत्य.

समबाजू समकोण पंचकोणांत संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

अबकडई समबाजू समकोण पंचकोणाकृति आहे, त्यांत वर्तुळ करावयाचें.



क आणि ड कोन कफ आणि डफ रेघांनीं दुभाग, त्या दोन रेघा फ बिंदूंत मिळतात. त्या बिंदू पासून फब, फअ, फई रेघा कर. फबक आणि फकड हे दोन △ (१ बु॰ ४ सि॰ म॰) एकरूप ∴ बफ = डफ, <कबफ = <कडफ आणि <कडई = <कबअ आहे. यांतून <कडफ = <कबफ हे व

जाकरितां (३ प्र० प्र०) बाकी ∠फडई = ∠फबअ ∴ ∠कबफ = ∠फबअ आहे ∴ फब रेघ ∠कबअ स दुभागिते. या प्रमाणेंच ∠अ आणि ∠ई यांस ही अफ आणि ईफ या रेघा दुभागितात. आतां सर्व बाजूंवर फ बिंदूपासून लंब केले असतां (१ बु० २६ सि० प्र०) फग, फह, फस, फल, फम बरोबर आहेत ∴ फ हा इच्छिले ⊙ चा मध्य आहे. हें सिद्ध.

चवदावा सिद्धांत. इं० कृ० ८

सम बाजू सम कोण पंचकोणा सभोंवती संलग्न वर्तुळ करावयाचें.



अबकडई एक समबाजू समकोण पंचकोणाकृतीचे बाहेर संलग्न वर्तुळ करावयाचें.

क आणि ड कोन कफ, डफ रेघांनीं दुभाग, त्या रेघा फ स्थळीं परस्परांस मिळतील, त्या बिंदूपासून फब, फअ, फई रेघा कर. त्या (मागील सि० सिद्ध केल्या प्र०) ∠ब, ∠अ आणि ∠ई यांस दुभागितात.

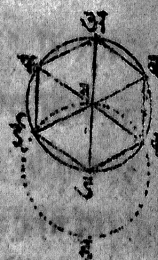
आतां ∠बकड = ∠कडई ∴ त्यांचीं अर्धे ∠फकड, ∠कडफ बरोबर ∴ फकड △ त (१ बु० ६ सि० प्र०) फक = फड आहे. या प्रमाणेंच फब, फअ, फई यांही प्रत्येकी फड चे बरोबर आहेत. तेव्हां यांतून एक त्रिज्या मानून केलेलें ⊙ सम कोण पंचकोणा बाहेर संलग्न आहे हें सिद्ध.

पंधरावा सिद्धांत. इं० कृ० ९

वर्तुळांत समबाजू समकोण षट्कोणाकृति करावयाची.

अबकडईफ एक ⊙ आहे, त्यांत समबाजू समकोण षट्

कोणाकृति करावयाचें.

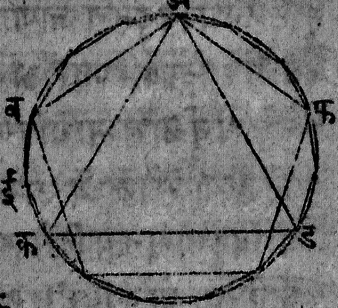


आतां दिल्या ०चा मध्य काढून अगड व्यास-कर आणि डग त्रिज्येनें ड ० मध्य करून गकह ई ० कर. अ,ब ब,क क,ड ड,ई ई,फ आणि अ,फ सांध. गई=गड, गड=डई ∴ गई=गड=ईड ∵ (१बु० ५सि०कु०प्र०) गईड हा △ समकोण आहे, व (१बु०३२सि.चे आधारें) <ईगड=<गडक=<डईग=६०° याप्रमाणेंच-<डगक=६०° आहेत. आतां ईब रेघेवर कग रेघ मिळून, (१बु० १३सि०प्र०) <ईगक+<कगब=२का० परंतु <ईगक=१२०° ∴ <कगब=६०° ∵ ईगड, डगक, कगब हे तीनही कोन परस्पर बराबर. आणि (१बु०१५सि०प्र०) याचा समोरासमोरचे कोनही प्रत्येकीं ६०° बराबर आहेत. यावरून गस्थळावरील सहाही कोन प्रत्येकी ६०° आहेत ∴ (३बु०२६ सि०प्र०) अब, बक, कड, डई, ईफ, अफ हे कौंस बराबर आहेत, ∵ (३बु०२९सि०प्र०) बराबर कौंसांचा ज्याही बराबर ∴ अबकडईफ हें समबाजू षट्कोण आहे. अफ कौंस =ईड कौंस आहे. यांत साधारण अबकड मिळविला असतां, फअबकड कौंस = ईडकबअ-कौंस आहे ∴ (३बु०२७सि०प्र०) <अफई=<फईड आहे. याप्रमाणेंच सिद्ध होतें कीं, अबकडईफ या षट्कोणाचे दुसरे कोन <अफई कोनाचे बराबर होतात, ∴ ही षट्कोणाकृति ०त समबाजू समकोण संलग्न आहे हें सिद्ध.

कु० वर्तुळांतील समबाजू षट्कोणाची प्रत्येक बाजू त्रिज्येबराबर असते.

सोळावा सिद्धांत. कृत्य.

वर्तुळांत समबाजू समकोण पंचदशकोणाकृति करावयाची.



अबकड० त (४बु॰२सि॰प्र॰) अडक एक समबाजू △ कर, (४बु॰ ११सि॰प्र॰) अशी एक समबाजू पंचकोणाकृति करकीं, तिचा आणि △चा शिरोबिंदु एक होईल. आतां अबक कौंसांत पंचदश भागांपैकीं पांच भाग आहेत, आणि अब कौंसांत तीन भाग आहेत ∴ बक कौंसांत दोन भाग आहेत. आतां (३बु॰३०सि॰प्र॰) बक कौंस ई स्थळीं दुभागला ∴ बई कौंस त्या वर्तुळाचा १५वा भाग आहे, त्याणें वर्तुळाचे १५ भाग करून, त्यांचीं टोंकें सांधिलीं, म्हणजे त्यापासून इच्छिली समबाजू समकोण पंचदशकोणाकृति होईल. हें सिद्ध.

चवथ्या बुकाचे प्रश्न.

१ वर्तुळाचे आंतील व बाहेरील बिंदूपासून दिलेले रेषे बराबर एक ज्या करावयाची.

२ दिलेले रेषे बराबर आणि दिलेले रेषेशीं स॰ तिर्शी दिलेले कोनाबराबर कोन करणारी वर्तुळांत ज्या करावयाची.

३ दिलेले वर्तुळास दिलेले रेषेशीं स॰ अशी स्पर्शरेष करावयाची.

४ दिलेले रेषेशीं दिलेले कोनाबराबर कोन करील अशी वर्तुळास स्पर्शरेष कर.

५ दिलेल्या रेषेमध्यें असा एक बिंदु काढ कीं, तो त्या रेषेंतील दु

ऱ्या एका दिलेल्या बिंदूपासून आणि दुसऱ्या दिलेल्या रेघेपासून बराबर अंतरानें होईल.

६ दिलेल्या बिंदूतून जाणारें आणि दिलेल्या रेघेस दिलेल्या बिंदूस्थळीं स्पर्श करणारें असें एक वर्तुळ कर.

७ दोन वर्तुळास साधारण स्पर्श रेघ कर.

८ दिलेल्या रेघे मध्यें असा एक बिंदु काढ कीं, तो दुसऱ्या दिलेल्या बिंदूपासून व दिलेल्या रेघे पासून बराबर अंतरानें होईल.

९ दिलेल्या दोन बिंदूंतून जाणारें व दिलेल्या रेघेस स्पर्श करणारें वर्तुळ कर.

१० दिलेल्या वर्तुळास व दिलेल्या रेघेंतील दिलेल्या बिंदूस्थळीं स्पर्श करणारें वर्तुळ कर.

११ वर्तुळांतील समबाजू अष्ट कोणाचें क्षेत्रफळ त्या वर्तुळाचे आंतील व बाहेरील चौरसाचे बाजूंचे का० चौ० बराबर आहे.

१२ दिलेल्या वर्तुळ पादांत वर्तुळ कर.

१३ दिलेल्या बिंदूतून जाणारें व दिलेल्या वर्तुळास दिलेल्या बिंदूस्थळीं स्पर्श करणारें वर्तुळ कर.

१४ वर्तुळा बाहेरील संलग्न चौ बाजूचे समोरासमोरचे बाजूंची बेरीज चौ बाजूचे अर्ध परिमिति बराबर आहे.

१५ बहुकोनाकृतीच्या सर्व बाजू दोहोंकडे वाढविल्या असतां, त्या मिळून जे कोन होतात, त्यांची बेरीज बाजू संख्येचे दुपटीत आठ उणें इतके का० बराबर आहे.

१६ का० चौ० चे समोरासमोरच्या बाजू व्यास मानून, त्यांचे एके च्या अंगास दोन अर्ध वर्तुळें केलीं असतां, त्यांचे मधील क्षेत्रफ

ग त्या का॰चौ॰बराबर आहे.

१७ दिलेले दोन रेघांस स्पर्श करणारें व दिलेल्या बिंदूंतून जाणारें वर्तुळ कर.

१८ दिलेल्या वर्तुळास व दिलेल्या दोन रेघांस स्पर्श करणारें वर्तुळ कर.

बूक पांचवें.

प्रथमसिद्धांत. ६.७६

चारपदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां आद्यंत पदांचा गुणाकार मध्यपदांचे गुणाकाराबरोबर आहे.

अ:ब::क:ड असें असल्यास अड = बक होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ असें आहे. दोनही पेट्यांस बड नें गुणून, अड = बक हें सिद्ध.

कुर॰ तीन पदें अखंड प्रमाणांत असल्यास आद्यंतांचा गुणाकार मध्य पदाचे वर्गाबरोबर असतो.

दुसरासिद्धांत.

दोन पदांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन पदांचे गुणाकाराबरोबर असला, तर तीं चार पदें प्रमाणांत आहेत.

अड = बक असेल, तर अ:ब::क:ड होईल.

अड = बक या समीकरणास बड नें भागिलें असतां $\frac{अ}{ब}$ $=\frac{क}{ड}$ ∴ अ:ब::क:ड हें सिद्ध.

तिसरासिद्धांत.

ज्या पदानें दुसऱ्या एक पदाशीं गुणोत्तर बराबर आहे; तीं पदें परस्पर बराबर आहेत.

अ आणि ब यांचें गुणोत्तर कशीं बराबर आहे; याजकरितां अ = ब होईल.

$\frac{अ}{क}=\frac{ब}{क}$ या दोनही पेट्यांस क नें गुणून, अ = ब हें सिद्ध.

चवथासिद्धांत.

जीं गुणोत्तरें दुसऱ्या एका गुणोत्तराशीं बराबर आहेत, तीं परस्पर बराबर असतात.

अ:ब::क्ष:य आणि क:ड::क्ष:य आहे, तर अ:ब::क:ड होईल.

अ:ब::क्ष:य ह्मणजे $\frac{अ}{ब}=\frac{क्ष}{य}$ आणि क:ड::क्ष:य ह्मणजे $\frac{क}{ड}=\frac{क्ष}{य}$ तेव्हां $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ आहे, ∴ अ:ब::क:ड हें सिद्ध.

पांचवा सिद्धांत. .... ह. ५७

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तीं परावर्तनानें ही प्रमाणांत होतात.

अ:ब::क:ड आहे, त्यास अ:क::ब:ड होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ या दोन ही पेट्यास $\frac{ब}{क}$ यानें गुणिलें असतां $\frac{अ}{क}=\frac{ब}{ड}$ ∴ अ:क::ब:ड हें सिद्ध.

सहावा सिद्धांत. .... ह. ५८

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तीं व्यस्तानें ही प्रमाणांत होतात.

अ:ब::क:ड आहे, त्यास ब:अ::ड:क होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ या समीकरणानें १ = १ या समीकरणास भागिलें असतां $\frac{ब}{अ}=\frac{ड}{क}$ ह्मणजे ब:अ::ड:क हें सिद्ध.

सातवा सिद्धांत. .... ह. ५९

चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तीं मिश्रणानें प्रमाणांत होतात.

अ:ब::क:ड आहे, त्यास अ+ब:ब::क+ड:ड होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ या दोन ही पेट्यांत एक मिळविला असतां अ+ब:ब::क+ड:ड आहे हें सिद्ध.

आठवा सिद्धांत. .... ह. ६०

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तीं [illegible]कीनें प्र

माणांत आहेत.

अ:ब::क:ड असें आहे,तर अ−ब:ब::क−ड:ड होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ या समीकरणाचे दोनही पेट्यांत एक वजा करून, प्रमाण मांडिलें,तेव्हां अ−ब:ब::क−ड:ड हें सिद्ध.

कु॰ या व मागील दोन सिद्धांतांपासून स्पष्ट दिसून येतें कीं,चतुः प्रमाणांतील पहिलें आणि दुसरें यांचे बेरजेस: त्यांची वजाबाकी:: तिसरें आणि चवथें यांचे बेरजेस: त्यांची वजाबाकी होते.

$\frac{अ+ब}{ब}=\frac{क+ड}{ड}$ आणि $\frac{अ-ब}{ब}=\frac{क-ड}{ड}$ यांत दुसऱ्यानें प्रथमास भागून, अ+ब:अ−ब::क+ड:क−ड हें सिद्ध.

नववा सिद्धांत.

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत,तेव्हां ती व्यस्त वजाबाकीनें ही प्रमाणांत आहेत.

अ:ब::क:ड आहे त्यास अ:अ−ब::क:क−ड होईल.

प्रथम प्रमाणाचें परावृत्त गुणोत्तर $\frac{ब}{अ}=\frac{ड}{क}$ असें आहे. दोनही पेटे एकांतून वजा करून, वत्याबाकीनें एकास भागून,अ:अ−ब::क:क−ड हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत.

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां तीं बेरजेनें ही प्रमाणांत होतात.

अ:ब::क:ड त्यास अ:अ+ब::क:क+ड होईल.

प्रथम प्रमाणाचें परावृत्त गुणोत्तर $\frac{ब}{अ}=\frac{ड}{क}$ या दोनही पेट्यांत एक मिळवून त्यानें एकास भागिलें,तेव्हां अ:अ+ब::क:क+ड हें सि

अकरावा सिद्धांत.

जांचा पदांची संख्या सारखी अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन या प्रमाणें सर्व पदें सरळ प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या श्रेणीचा पहिल्या पदास : तिचें शेवटील पद :: दुसरे श्रेणीचे पहिले पदास : तिचें शेवटील पद.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह या दोन श्रेण्यांचीं पदें प्रतिज्ञे प्र॰ सरळ प्रमाणांत आहेत. त्यास अ : ड :: ई : ह होईल.

(प्रतिज्ञे प्र॰) $\frac{अ}{ब} = \frac{ई}{फ}$, $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$ आणि $\frac{क}{ड} = \frac{ग}{ह}$ असें आहे, तें व्हां तीनही समीकरणांचा गुणाकार करून, संक्षेप देऊन प्रमाण मांडिलें, तेव्हां अ : ड :: ई : ह हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत.

जांचा पदांची संख्या सारखी आहे अशा दोन श्रेण्यांतील जर दोन दोन या प्र॰ सर्व पदें वक्र क्रमानें प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या श्रेणीचें प्रथम पद, तिचे शेवटील पदास, तर दुसरीचें प्रथम पद, तिचे शेवटील पदास होईल.

अ, ब, क, ड आणि ई, फ, ग, ह यांतील दोन दोन पदें प्रतिज्ञे प्र॰ वक्र प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अ : ब :: ग : ह, ब : क :: फ : ग, क : ड :: ई : फ त्यास अ : ड :: ई : ह होईल.

(प्रतिज्ञे प्र॰) $\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$, $\frac{ब}{क} = \frac{फ}{ग}$ आणि $\frac{क}{ड} = \frac{ई}{फ}$ असें आहे, तें व्हां सर्व समीकरणांचा गुणाकार करून, संक्षेप केला असतां अ : ड :: ई : ह हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत.

जेव्हां चार पदें प्रमाणांत आहेत, तेव्हां त्यांचे वर्ग घनादि किंवा

वर्गमूलादि प्रमाणांत असतात.

अः बः:कः ड आहे, तेव्हां त्यांचे कोणतेही घात किंवा घातमूळें प्रमाणांत होतील.

(प्रतिज्ञे प्र०) $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$ या दोनही पेट्यांचा म घात करून, न घातमूळ काढून, प्रमाणें मांडिलीं, तेव्हां $अ^{म} : ब^{म} :: क^{म} : ड^{म}$ आणि $\sqrt[न]{अ} : \sqrt[न]{ब} :: \sqrt[न]{क} : \sqrt[न]{ड}$ हें सिद्ध.

चवदावा सिद्धांत. इ०७२

जर किती एक पदें प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या अग्रसरास जर पहिला उपाग्रसर, तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस सर्व उपाग्रसरांची बेरीज होईल.

अ, ब, क, ड, ई, फ, ग, ह हीं पदें प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अः बः: कः डः: ईः फः: गः ह त्यास अः बः: अ+क+ई+गः ब+ड+फ+ह होईल.

अब = अब
अड = बक
अफ = बई
अह = बग

असें आहे त्यास या समीकरणांची बेरीज केल्यान अब+अड+अफ+अह = अब+बक+बई+बग असें होतें; साधारण गुण्यक काढून, अ (ब+ड+ह+फ) = ब (अ+क+ग+ई) ह्मणजे अः बः: अ+क+ई+गः ब+ड+फ+ह, हें सिद्ध.

कु० कितीएक पदें प्रमाणांत असल्यास, कोणत्याही अग्रसरास, जर त्याचा उपाग्रसर, तर सर्व अग्रसरांचे बेरजेस, सर्व उपाग्रसरांची बेरीज.

पंधरावा सिद्धांत.

जर तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील, तर पहिल्या प

दास जर तिसरें पद, तर पहिले पदाचे वर्गास तिसरे पदाचा वर्ग.

अ,ब,क हीं तीन पदें अखंड प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे अ:ब::ब:क त्यास अ:क::अ²:ब² होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{ब}{क}$ असें आहे, त्यास या समीकरणास $\frac{अ}{ब}$ यानें गुणिलें असतां $\frac{अ^2}{ब^2}=\frac{अ}{क}$ ह्मणजे अ:क::अ²:ब² हें सिद्ध.

सोळावा सिद्धांत.

जर चार पदें अखंड प्रमाणांत असलीं, तर पहिल्या पदास जर चवथें पद; तर पहिल्या पदाचे घनास दुसरे पदाचा घन.

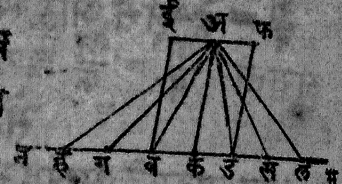
अ,ब,क,ड हीं चार पदें अखंड प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अ:ब::ब:क::क:ड त्यास अ:ड::अ³:ब³ होईल.

$\frac{अ}{ब}=\frac{ब}{क}$, $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ आणि $\frac{अ}{ब}=\frac{अ}{ब}$ असें आहे, तेव्हां या समीकरणांचा गुणाकार घेतला असतां $\frac{अ^3}{ब^3}=\frac{अ}{ड}$ असें होतें; ह्मणजे अ:ड::अ³:ब³ हें सिद्ध.

बूकसहावें.

प्रथम सिद्धांत. .... हृ०७९

एका उंचीचे त्रिकोण व स॰ चौ॰ आपल्या पायाशीं प्रमाणांत असतात.



अबक आणि अकड हे दोन त्रि॰ व ईक आणि फक हे दोन स॰ चौ॰ एकाच उंचीचे आहेत, तर अबक △: अकड △:: बक: कड आणि ईक ▫: फक ▫:: बक: कड होईल.

बड बाजू दोहोंकडे न आणि म पर्यंत वाढवून, तींतून बक रेघे एवढे बग, हग; आणि कड रेघे एवढे डस, सल भाग घे. अ,ह अ,ग अ,स अ,ल बिंदु सांध. ह्मणजे अहग, अगब, अबक हे △ (१बु॰ ३८ सि॰ प्र॰) परस्पर बराबर. तसेंच अडक, असड, अलस हे ही परस्पर बराबर. कह, बक चा जितके पट आहे, तितके पट अहक △, अबक △ चा आहे. तसेंच कल, कड चा जितके पट आहे, तितके पट अकल △, अकड △ चा आहे. बक, कड पाये आणि अबक, अकड हे △ अशीं चार पदें आहेत. यांत बक पाया आणि अबक △ यांचीं सम व्यापकें अनुक्रमें हक पाया आणि अहक △ आहेत. तसेंच कड पाया आणि अकड △ यांचीं समान व्यापकें कल पाया आणि अकल △ हीं आहेत; ∴ कह पाया जर कल पाया पेक्षां मोठा असेल, तर अहक △, अकल त्रि॰ पेक्षां मोठा होईल, बराबर असेल तर बराबर होईल, आणि लहान असेल, तर लहान होईल; ∴ (६॰ व्या॰ प्र॰) बक:

* उंची शब्दानें लंबोंची समजावी.

कड :: अबक: अकड हें सिद्ध.

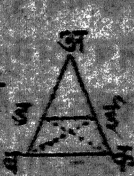
(१ बु० ५१ सि० प्र०) ईक, कफ हे स० चौ० अनुक्रमें अबक, अड फ△ चे दुप्पट आहेत, आणि पदें आपल्या समान व्यापकांशीं प्रमाणांत आहेत ∴ अबक△ : अकड△ :: ईक▫ : फक▫, (वर सिद्ध केल्याप्र०) बक : कड :: अबक△ : अकड△ (५ बु० ४ सि० प्र०) बक : कड :: ईक▫ : फक▫ हें सिद्ध.

प्रथम कुर० समान उंचीचे त्रि० व स० चौ० पायाशीं प्रमाणांत असतात.

दुसरी कुर० ज्यांचे पाये समान आहेत असे त्रि०, का० चौ० व स० चौ० हे आपले उंचीशीं प्रमाणांत असतात.

दुसरा सिद्धांत. इ० ८२

कोणत्याही त्रि० त एका बाजूशीं स० रेघ केली, तर ती दुसऱ्या दोन बाजूंस त्या आहेत तशाच असतां, किंवा वाढविल्या असतां प्रमाणानें छेदील. अ० प्रमाणानें छेदीत असेल, तर ती रेघ तिसरे बाजूशीं स० होईल.



अबक△ त डई रेघ बक पायाशीं स० केली, तर अड : बड :: अई : ईक होईल.

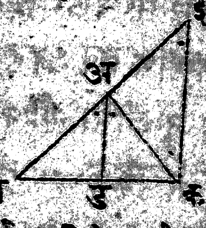
बई, क, ड सांध. डईक आणि डईब हे दोन△ (१ बु० ३७ सि० प्र०) बराबर ∴ त्यांचें गुणोत्तर अडई△ शीं समान आहे, आणि (६ बु० १ सि० प्र०) अडई△ : डईब△ :: अड : डब आणि अडई△ : डईक△ :: अई : ईक परंतु डईब△ = डईक△ आहे ∴ (५ बु० ४ सि० प्र०) अड : डब :: अई : ईक हें सिद्ध.

उलट प्रकार.

डक बई सांध. (प्रतिज्ञे प्र.) बड : डअ :: कई : ईअ आहे. व (६ बु. १ सि. प्र.) बड : डअ :: बडई△ : ईडअ△ आणि कई : ईअ :: कडई△ : डईअ△ तेव्हां (५ बु. २ सि. प्र.) बडई△ : ईडअ△ :: कडई△ : ईडअ△ आहे, व बडई△ = कडई△ आणि हे एकाच पायावर आहेत ∴ (१ बु. ३९ सि. प्र.) डई, बक या स. रेषांचे एकाच जोडांत आहेत, तेव्हां डई, बक शीं स. आहे. हें सिद्ध.

तिसरा सिद्धांत. .... ह. ८३

जी रेघ त्रिकोणाचा कोणता ही कोन दुभागते, ती त्याचे समोरचे बाजूचे दोन खंड करते, हे दोन खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत. उलट. ते खंड दुसऱ्या दोन बाजूंशीं प्रमाणांत असतील, तर खंड करणारी रेघ समोरचे कोनास दुभागील.



अबक△त अड रेघ अ कोनास दुभागून, बक पायाचे दोन खंड करील, तर बड : डक :: अब : अक होईल आणि याचें उलट असें असेल तर ती रेघ अ कोनास दुभागील.

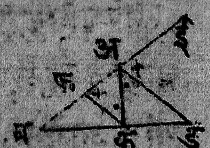
अड शीं कई स. कर आणि अब रेघ कईस मिळे पर्यंत वाढव. (१ बु. २९ आणि ६ सि. प्र.) अई = अक आहे, आणि बकई△त कई रेघ अड शीं स. आहे ∴ (६ बु. २ सि. प्र.) बड : डक :: बअ : अई अ. अक हें सिद्ध.

उलट. बड : डक :: अब : अक गृहीत आहे. (६ बु. २ सि. प्र.) बड : डक :: बअ : अई तेव्हां (५ बु. ४३ सि. प्र.) अक = अई ∴ (१ बु. ५ सि. प्र.) ∠ई = ∠अकई परंतु अड शीं कई स.

आहे ∵ (१बु॰२९सि॰प्र॰) <ई = <बअड आणि <अकई = <डअक ∴ <बअड = <कअड आहे. हें सिद्ध.

अ सिद्धांत.

त्रिकोणाचा बाहेरील कोनास दुभागणारी आणि पाया वाढविला असतां, त्यास मिळणारी अशी रेघ केली तर वाढविल्यारेघींसर्व पाया वाढविले पायाशीं प्रमाणांत होईल. जसें त्या त्रिकोणाचा राहिल्या बाजू. अथवा असें प्रमाण असेल, तर शिरकोन आणि वाढविलेले पायाचा शेवट सांधिला असतां ती रेघ बाहेरील कोनास दुभागील.



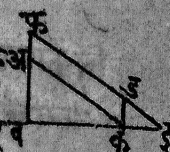
अबक△ चीबअ बाजू ई पर्यंत वाढवून <कअई दुभागणारी आणि बक पाया वाढवून त्यास ड स्थळीं मिळणारी अशी अड रेघ केली तर बडः कड ∷ अबः अक होईल. आणि असें प्रमाण असेल तर अड रेघ <कअईस दुभागील.

अड रेघेशीं क बिंदूतून कफ रेघ सम॰ कर. (१बु॰२९सि॰प्र॰) <अफक = <ईअड आणि <अकफ = <डअक अ॰ <डअई ∴ (१प्र॰न॰) <अफक = <अकफ ∵ (१बु॰६सि॰प्र॰) अक = अफ, बअड△ त अड पायाशीं फक स॰ आहे, तेव्हां (६बु॰२सि॰प्र॰) बडः कड ∷ बअः फअ अ॰ अक आहे. हें सिद्ध.

उलट. बडः कड ∷ अबः अक गृहीत आहे. आणि (६बु॰२सि॰प्र॰) बडः कड ∷ अबः अफ आहे (५बु॰ ९ व २ सि॰प्र॰) अफ = अक आहे, व (१बु॰५ २९ सि॰चे आधारें) अड रेघ <कअईस दुभागिते. हें सिद्ध.

चवथासिद्धांत.

समकोण त्रिकोणांत समकोणाजवळचा बाजू परस्पर प्रमाणांत असतात.

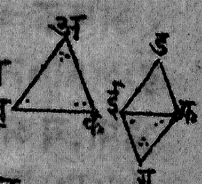


अबक आणि डकई या दोन △त <ब=<डकई <अ=<ड आणि <अकब=<ई असें असेल, तर बअ: बक:: कड: कई अ॰ बअ: अक:: कड: डई इ॰ होईल.

हे दोन △ क बिंदूस्थळीं जोड असे कीं, बई रेषेंत दोनही त्रि॰ चे पाये येतील. नंतर बअ, ईड बाजू फ बिंदूस्थळीं मिळत पर्यंत वाढीव. (१ बु॰ २८ सि॰ प्र॰) बफ शीं कड आणि अक शीं फई स॰ आहे:: (१ बु॰ ३४ सि॰ प्र॰) अफ=कड आणि अक=फड आहेत. (६ बु॰ २ सि॰ प्र॰) बक: कई :: बअ: अफ अथवा कड परावर्तनानें बक: बअ:: कई: कड हें सिद्ध.

पांचवासिद्धांत. ...... इ॰ ८५

जा त्रिकोणाचा बाजू अनुक्रमानें प्रत्येकीं परस्पर प्रमाणांत असतात, ते त्रि॰ परस्पर समकोन असतात. आणि त्यांचे समकोन सजातीय बाजूंचा समोर असतात.



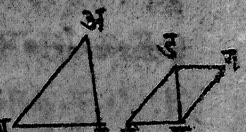
अबक आणि डईफ या दोन △चा बाजू अनुक्रमानें प्रमाणांत असतील, तर ते △ परस्पर समकोण होतील. आणि त्यांचा सजातीय बाजू समकोणासमोर असतील. ह्मणजे अब: बक:: डई: ईफ होईल.

ईफ रेषेवर अबक △ शीं समकोन △ कर. असा कीं, <ब=<फईग, <क=<ईफग आणि <अ=<ग होईल. तेव्हां (६ बु॰ ४ सि॰ प्र॰) अब: बक:: गई: ईफ आणि (प्रतिज्ञे प्र॰) अब: बक::

डई : डफ :: (५ बु० ४,२ सि०प्र०) ईड = ईग तसेंच डफ = फग आहे :. डईफ, डईग हें दोन △ (१ बु० ८ सि०प्र०) एकरूप ते व्हां ते परस्पर समकोन आहेत. गईफ आणि अबक हे दोन △ समकोन आहेत :. (१ प्र० प्र०) अबक △ डईफ △ शीं समकोन आहे हें सिद्ध.

सहावा सिद्धांत. ह०८६

एका त्रिकोणाचा एककोन दुसऱ्या त्रिकोणाचे एककोनाबरोबर आणि त्याबराबर कोनाचा दोहोंकडील बाजू अनुक्रमें प्रत्येकीं परस्पर प्रमाणांत असतील, तर ते दोन त्रिकोण परस्पर समकोण होतील. आणि त्यांचे समकोण सजातीय बाजूंशीं प्रमाणांत असतील.



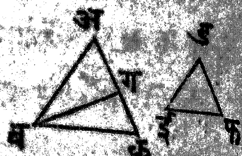
अबक आणि डईफ या दोन △ त <अ = <ड आणि अब : अक :: डई : डफ असें असेल, तर हे दोन △ परस्पर समकोण होतील.

अबक △ शीं समकोण डफ रेघेवर डगफ △ कर असा कीं, <अ किंवा <ड = <गडफ, <क = <गफड आणि <ब = <ग होईल. आतां (६ बु० ४ सि०प्र०) बअ : अक :: गड : डफ आणि (प्रतिज्ञे प्र०) बअ : अक :: डई : डफ :. (५ बु० ४ व २ सि०प्र०) ईड = गड तेव्हां डईफ आणि डगफ हे दोन △ (१ बु० ४ सि०प्र०) एकरूप. डगफ △ अबक △ शीं समकोण आहे :. अबक △ डईफ △ शीं समकोण आहे हें सिद्ध.

सातवा सिद्धांत.

जर दोन त्रिकोणांत एकाचा एककोन दुसऱ्याचे एक कोना

बराबर आणि त्या बराबर कोना शिवाय दुसरे कोना अवळील बाजू अनुक्रमें प्रत्येकीं प्रमाणांत आणि तिसरे कोन प्रत्येक लघु किंवा विशाळ असतील, तर हे दोन त्रि॰ परस्पर समकोण होतील.



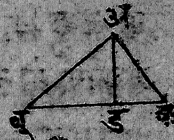
अबक आणि डईफ या दोन △ त <अ =<ड आणि <ब आणि <ई यांचा बाजू प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अब:बक::डई:ईफ आणि <क आणि <फ प्रत्येकीं लघु किंवा विशाळ आहेत, तर हे दोन △ परस्पर समकोण होतील. प्रथम <क आणि <फ लघु मानून. <ब =<ई नाहीं असें मानिल्यास <ब > <ई मानून, अब रेषेशीं ई कोनाबराबर कोन करणारी ब बिंदूंतून बग रेघ कर. तेव्हां (१बु॰३२सि॰प्र॰) अबग आणि ईफड हे दोन △ समकोण आहेत. ∴ (६बु॰४सि॰प्र॰) अब:बग::डई:ईफ आहे; परंतु अब:बक::डई:ईफ गृहीत आहे. ∴ (५बु॰९व११सि॰प्र॰) बक=बग आहे ∴ (१बु॰५सि॰प्र॰) <बगक =<क आहे; परंतु <क लघु आहे, यास्तव <बगक ही लघु आहे ∴ (१बु॰१३सि॰प्र॰) <बगअ किंवा त्याचे बराबरीचा <फ विशाळ आहे, परंतु <फ लघु घेतला आहे, तेव्हां हें होणें अशक्य ∴ <अबक =<डईफ आहे ∴ अबक, डईफ हे दोन △ समकोण आहेत हें सिद्ध.

तसेंच <क विशाळ असल्यास <क + <बगक > २ का॰ हें अशक्य होय.

आठवा सिद्धांत. .... ह॰ ८७

काटकोन त्रिकोणांत काटकोनापासून कर्णावर लंब केला अ

सतां, त्याचा दोहों आंगास जे दोन का० त्रि० पडतात, ते सगळ्या त्रि कोणाशीं व परस्परांशीं सरूप आहेत.



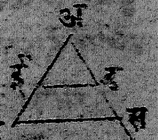
अबक का० △त बक कर्णावर अ का० पासून केलेले अड लंबानें अबड आणि अकड हे दोन △ झाले, ते अबक △शीं व परस्परांशीं समकोण आहेत.

अबक आणि अबड या दोन △त <ब साधारण <बअक =<बडअ आहे, कारण का० आहेत. तेव्हां (१ बु० २२ सि० प्र०) हे दोन △ समकोण आहेत. तसेंच अबक, अडक हेही सम कोण आहेत, अडब, अडक या दोन △ त ड का० = ड का०, <बअड = <क तेव्हां (१ बु० २२ सि० प्र०) तिसरा कोन <ब = <कअड आहे ∴ हेही दोन △ परस्पर समकोण व सरूप आहेत. हें सिद्ध.

कु० का० त्रि० त का० पासून कर्णावर लंब केला असतां, तो लंब कर्णाचे दोन खंडांचें मध्य प्रमाण आहे; आणि का० को० चे दो- हों कडील बाजू प्रत्येकीं कर्ण आणि त्या बाजूकडील कर्णाचा खंड यांचें मध्य प्रमाण आहे. .... इ० ..

नववा सिद्धांत.

कोणत्याही रेघेचा असा तुकडा पाडावयाचा कीं, ती रेघ त्या तुकड्याचे विवक्षित पट होईल.



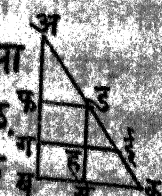
अब सरळ रेघेचा असा तुकडा पाडाव याचा कीं, अब रेघ त्या तुकड्याचे विवक्षि त पट होईल.

अब रेघेशीं कोणता तरी एक कोन करणारी, परंतु एथें ल घु कोन करणारी अशी अक अमर्याद रेघ करून, त्या रेघेनें कोण

त्याही अड खंडाचे विवक्षित पट अस खंड घेऊन बस बिंदु सांध आणि तिशीं ड बिंदूतून डई स॰ कर. अबस △ त बस रेषे शीं डई स॰ आहे ∴ (६ पु॰ २ व ५ पु॰ ७ सि॰ म॰) अस : अड :: अब : अई :: अड चे अस जितके पट आहे, तितके पट अई चे अब आहे, परंतु अस, अड चे विवक्षित पट आहे ∴ अब अई चे विवक्षित पट आहे. हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत. कृत्य ...... ह॰ कृ॰ ७

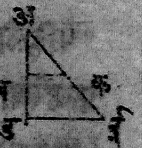
दिलेल्या रेषेच्या खंडांशीं सरूप असे दुसऱ्या दिलेल्या रेषेचे खंड पाडावयाचे.



अब रेषेचे असे भाग पाडावयाचे कीं, ते दुसऱ्या अक रेषेचे अड, डई, ईक या भागांशीं सरूप होतील. अब आणि अक या दोन रेषा लघुकोन करतील अशा ठेव, आणि त्यांचीं ब, क शेवटें सांध. बक शीं ई आणि ड बिंदूपासून ईग, डफ स॰ कर, त्या अब रेषे स फ आणि ग स्थळीं छेदितील, त्या पासून अफ, फग, गब हे इच्छिले खंड होतील. अब शीं डहस स॰ कर, तर फह आणि हब हे स॰ चौ॰ आहेत ∴ डह = फग आणि हस = गब आहे, डसक या △ त सक शीं ईह स॰ आहे ∴ (६ पु॰ २ सि॰ म॰) कई : ईड :: सह : हड अ॰ ब ग : गफ आणि गईशीं फड स॰ आहे ∴ ईड : अड :: गफ : अफ ∴ अब रेषेचे इच्छिले भाग झाले. हें सिद्ध.

अकरावा सिद्धांत. कृत्य .... ह॰ कृ॰ ८

तीन प्रमाणांतील पहिल्या दोन रेषा कळल्या असतां, त्यांपासून तिसरी रेष काढावयाची.

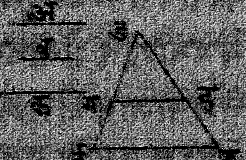


अब आणि अक यादोन रेघा त्रि प्रमाणांतील आहेत, त्यांपासून तिसरी रेघ काढावयाची.

अब आणि अक यादोन रेघा कोन करीत अशा ठेव. आणि त्या वाढीव. नंतर अक = बड करून ब, क बिंदु सांधून, तिशीं ड बिंदूतून डई रेघ सं॰ कर. आणि अक तीस मिळे पर्यंत वाढीव. डई शीं बक सं॰ आहे ∵ (६ बु॰ २ सि॰ प्र॰) अब : बड :: अक : कई, बड = अक आहे ∴ अब : अक :: अक : कई ∴ कई, अब, अक यांचें तिसरें प्रमाण आहे. हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत. कृत्य ....इं॰ कृ॰ १

चतुः प्रमाणांतील पहिल्या तीन रेघा कळल्या असतां, चवथी रेघ काढावयाची.

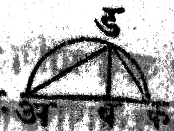


चतुः प्रमाणांतील अ, ब, क रेघा कळल्या आहेत. यांपासून चवथी रेघ काढावयाची.

ज्यांच्या मध्यें लघुकोन होईल अशा डई, डफ रेघा कर, आणि अ = डग, ब = गई कर. क = डह करून वाढीव. गह सांधून, तिशीं ई बिंदूतून ईफ रेघ सं॰ कर. डईफ या △ त (६ बु॰ २ सि॰ प्र॰) डग : गई :: डह : हफ, परंतु अ = डग, ब = गई आणि क = डह आहे ∴ अ : ब :: क : हफ ∴ अ, ब, क या तीन रेघांचें हफ हें चतुः प्रमाण आहे. हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत. ......इं॰ कृ॰ १

त्रि प्रमाणांतील पहिली रेघ आणि शेवटील रेघ कळली असतां, त्यापासून मध्य रेघ काढावयाची.

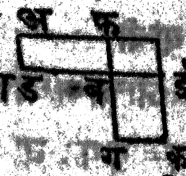


पहिली आणि शेवटील अब, बक या रेघा कल्या आहेत त्यांपासून मध्यरेघ काढायाची.

एका सरळरेघेंत अब आणि बक या लावून ठेव, अक संयुक्तरेघेवर अडक अर्धवर्तुळ कर आणि त्यारेघेचेच संयोग स्थळीं बड लंब परिघापर्यंत कर. ड, अ ड, क सांध. (३ बु॰ ३१ सि॰ म॰) अडक का॰ △ आहे, ब का॰ पासून कर्णावर बड लंब आहे. (६ बु॰ ८ सि॰ कु॰ म॰) बड रेघ अब आणि बक यांचे मध्य प्रमाण आहे. हें सिद्ध.

चवदावा सिद्धांत.

जर दोन बराबर स॰ चौ॰ त एकाचा एक कोन दुसऱ्याचे एक कोना बराबर असेल, तर त्या समकोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत होतील. आणि समकोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असल्यास ते स॰ चौ॰ परस्पर बराबर होतील.



अब आणि बक या दोन समान स॰ चौ॰ त त्यांचे ब बिंदूजवळचे कोन परस्पर बराबर आहेत. तर डब : बई :: गब : फब होईल.

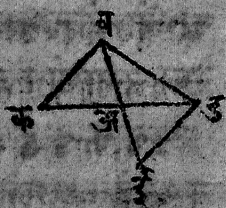
अब आणि बक हे स॰ चौ॰ असे ठेव कीं, डब आणि बई या दोन बाजू एके सरळरेघेंत येतील. (१ बु॰ १४ सि॰ म॰) गब आणि फब याही एके च सरळरेघेंत येतील. ईफ स॰ चौ॰ पुरा कर. अब : फई :: बक : फई हें उघड च आहे. (५ बु॰ ७ सि॰ म॰) अब : फई :: डब : बई आणि बक : फई :: गब : फब (६ बु॰ १ सि॰ म॰) डब : बई :: गब : फब तेव्हां अब आणि बक या स॰ चौ॰ च्या समान कोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आ-

झालें हें सिद्ध.

उलट प्रकार. (६बु०१सि०प्र०) डब: बई :: अब: फई आणि गब: फब :: बक: फई आणि (प्रतिज्ञेप्र०) डब: बई :: गब: फब :: अब: फई :: कब: फई तेव्हां (५बु०२सि०प्र०) अब स० चौ० बक स० चौ० बराबर आहे. हें सिद्ध.

पंधरावा सिद्धांत. ह०८७ चौकू०

दोन समान त्रि०त एकाचा एककोन दुसऱ्याच्या एककोना बराबर आहे, तर त्या समान कोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत. आणि दोन त्रि०त समान कोनाजवळच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत, तर ते दोन त्रि० समान आहेत.



अबक आणि अडई या दोन समान △त अ स्थळावरील कोन परस्पर बराबर आहेत, तर कअ: अड :: ईअ: अब होईल. आणि अ स्थळावरील कोन समान असून त्या समान कोनाच्या बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत असतील, तर अबक आणि अडई हे दोन △ समान होतील.

हे दोन △ असे ठेवकीं, कअ आणि अड या दोन बाजू एकेच सरळरेषे घेंत येतील. मग (१बु०१४सि०प्र०) अई आणि अब या ही एकेच सरळ रेषेंत येतील. ब, ड सांध. अबक △= अडई △ आहे: अबक आणि अडई यांचें अबड △ शीं समान गुणोत्तर आहे. ह्मणजे अबक △: अडब △ :: अडई △: अडब △ (६बु०१सि०प्र०) अबक △: अबड △ :: कअ: अड आणि अडई △: अडब △ :: अई: अब :: (५बु० ९सि०प्र०) कअ:

अड: अई::अब हेंसिद्ध.

उलटप्रकार. (६बु०२सि०प्र०)कअ: अड::अबक△:अबड△,व अई: अब:: अडई△: अडब△;परंतु (प्रति ज्ञे प्र०)कअ:अड::अई:अब आहे. (५बु०४सि०प्र०)अबक△: अडब△:: अडई△: अडब△ ह्मणजे अबक आणि अडई यांचे अडब△ शीं समान गुणोत्तर आहे: (५बु०३सि०प्र०) अबक△ = अडई△ हेंसिद्ध.

सोळावा सिद्धांत. ह०-१

चार रेषा प्रमाणांत असल्यास आद्यंत रेषांचा का०चौ० दोन मध्य रेषांचे का०चौ० बराबर होईल. आणि आद्यंत रेषांचा का०चौ० दोन मध्य रेषांचे का०चौ० बराबर असेल,तर त्या चार रेषा प्रमाणांत होतील.



अब,कड,ई आणि फ या चार रेषा प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अब:कड::ई:फ ∴ अब·फ = कड·ई होईल. अ० अब·फ = कड·ई असेल,तर अब: कड:: ई:फ होईल.

अब रेषेवर अ स्थळीं फ रेषे बराबर अग लंब कर. तसा कड रेषेवर क स्थळीं ई रेषे बराबर कह लंब करून,गब,हड का०चौ० पुरे कर. गब आणि हड या दोन का०चौ०त अ कोन क कोनाचे बराबर असून त्याचा बाजू व्यतिक्रमानें प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अब: कड:: ई:फ, अ०कह: अग, तेव्हां गब का०चौ० हड का०चौ०चे बराबर आहे हें सिद्ध.

उलट प्रकार. गब का०चौ० = हड का०चौ० आणि त्यांत

<अ = <क आहे :. (६ बु॰ १२ सि॰ प्र॰) अब : कड :: कह : हग

अ॰ ई : फ हें सिद्ध.

सत्रावा सिद्धांत. ....ह॰ ७७

तीन रेघा प्रमाणांत असतील, तर आद्यंत रेघांचा का॰ चौ॰ म

ध्य रेघेच्या वर्गाबराबर होईल. आणि आद्यंत रेघांचा का॰ चौ॰ म

ध्य रेघेच्या वर्गाबराबर असेल, तर त्या तीन रेघा प्रमाणांत होतील.

अ, ब आणि क या तीन रेघा प्रमाणांत आहेत. अ ——— ब ——— ड ——— क ———

म्हणजे अ : ब :: ब : क, तर अ॰क = ब² होईल. अ॰

क = ब² असेल, तर त्या तीन रेघा प्रमाणांत होतील.

ब रेघेबरोबर ड रेघ घे. (प्रतिज्ञेप्र॰) अ : ब :: ड : क अ॰ ड : क

(६ बु॰ १६ सि॰ प्र॰) अ॰क = ब॰ड परंतु ब = ड आहे :. अ॰क

= ब² हें सिद्ध.

उलट प्रकार. वर प्रमाणेंच ब = ड घे. तेव्हां अ॰क = ब॰ड

असें आहे :. (६ बु॰ १६ सि॰ प्र॰) अ : ब :: ड : क परंतु ब = ड

आहे :. अ : ब :: ब : क ह्मणजे अ, ब, क या प्रमाणांत आहेत हें सि॰

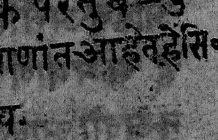
अठरावा सिद्धांत. कृत्य.

दिलेल्या सरळ रेघेवर दिलेल्या आकृतीशीं सरूप व त्या प्रमा

णें स्थित अशी सरळरेघाकृति करावयाची.

अब रेघेवर कडईफ दिलेले चौकोना-

शीं सरूप व त्या प्रमाणें स्थित असा चौको



न काढावयाचा.

डफ सांध. (१ बु॰ २३ सि॰ प्र॰) अब रेघेंत अ बिंदूजवळ <क

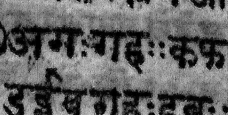
डफ = <अगब करणाऱ्या रेघा

= <बअग व ब बिंदूजवळ <कडफ = <अगब करणाऱ्या रेघा

कर. (१बु॰२२सि॰म॰) कडफ आणि अबग हे दोन △ समकोन. पुन्हा (१बु॰२२सि॰म॰) बग रेषेशीं ग बिंदूजवळ <ड फई = <बगह कर. तसेंच ब बिंदूजवळ <फडई = <गबह कर. गबह आणि फडई हे दोन △ (१बु॰ २२सि॰म॰) समकोन आहेत ∴ (२म॰म॰) <अगब + <बगह = <कफड + <डफई ह्मणजे <अगह = <कफई याप्रमाणेंच <अबह = <कडई आहे ∴ अबहग चौ॰ कडईफ चौ॰ शीं समकोण आहे. गअब आणि फकड हे दोन △ समकोण आहेत ∴ (६ बु॰ ४सि॰म॰) अग:गब :: कफ:फड, बगह आणि डफई हे दोन △ समकोण आहेत, ∴ बग:गह :: डफ:फई ∴ (५ बु॰ ११सि॰म॰) अग:गह :: कफ:फई आणि (६ बु॰ ४सि॰म॰) अब:बह :: कड: डई व गह:हब :: फई ईड. अबहग आणि कडईफ हे स॰ चौ॰ समकोन असें वरा सिद्ध झालें. आणि आतां यांच्या समकोनाजवळील बाजू प्रमाणांत आहेत असें सिद्ध झालें ∴ (६ बु॰ ६सि॰म॰) हे सरूप आहेत. हें सिद्ध. या प्रमाणें पंचकोणाकृतीशीं सरूप आणि त्या प्रमाणें स्थित अशी आकृती अब रेषेवर काढितां येईल.

एकुणिसावा सिद्धांत.

जे त्रिकोण सरूप असतात, ते आपल्या सजातीय बाजूंचा गुणोत्तराचा वर्गा मध्यें प्रमाणांत असतात.



अबक आणि डईफ हे दोन △ सरूप आहेत. एकाचा ब कोन दुसऱ्याचे ई कोना बरोबर आहे ∴ अब: बक :: डई : ईफ असें आहे ∴ बक आणि ईफ या दोन बाजू सजातीय आहेत, त्यास बक आणि ईफ यांचें गु

णोत्तराचे वर्गामध्यें अबक आणि डईफ हे △ प्रमाणांत हो तील.

(६ बु० ११ सि० म०) बक आणि ईफ यांचें त्रि प्रमाण पद बग काढ, तेव्हां बक: ईफ:: ईफ: बग असें होईल. अ, ग सांध अब: बक:: डई: ईफ (५ बु० ५ सि० म०) परावर्तन करून, अब: डई:: बक: ईफ असें होतें, परंतु बक: ईफ:: ईफ: बग असें आहे:. (५ बु० ४ सि० म०) अब: डई:: ईफ: बग:: (६ बु० १५ सि० म०) अबग आणि डईफ हे △ परस्पर बराबर आहेत.

जर तीन पदें प्रमाणांत असतील तर प्रथम आणि तिसरें यां चें गुणोत्तर प्रथम आणि दुसरें यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर आ हे:. बक, ईफ आणि बग या रेषा प्रमाणांत आहेत:. बग आणि बक यांचें गुणोत्तर बक आणि ईफ यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बरा बर आहे. (६ बु० १ सि० म०) बक: बग:: अबक △ : अबग △, अबक आणि अबग यांचें गुणोत्तर बक आणि ईफ यांचे गु णोत्तराचे वर्गा बराबर आहे; परंतु अबग △ = डईफ △ आहे :. अबक आणि डईफ या △ चें गुणोत्तर बक आणि ईफ यांच्या भुजांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर आहे हें सिद्ध.

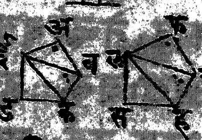
कुर० तीन रेषा प्रमाणांत असल्यास प्रथम रेघेवर कसाही त्रि० काढिला व त्याशीं सरूप व त्या प्रमाणें स्थित असा दुसऱ्या रेघेवर त्रि० काढिला असतां, पहिल्या रेघेस जर तिसरी रेघ, तर पहिल्या रेघेवरील त्रि०स दुसऱ्या रेघेवरील त्रि० आहे.

विसावा सिद्धांत.

समान बहुकोणाकृतीचे सरूप त्रिकोण सारखे पडतात आणि

त्या त्रि॰चें गुणोत्तर बहुकोणाकृतीचे गुणोत्तरा बरोबर असतें व बहुकोणाकृतीचा सजाती यबाजूंचा गुणोत्तराचा वर्गाबरोबर बहुकोणाकृतीचें गुणोत्तर असतें.

प्र



अबकडई आणि फगहसल या दोन बहुकोणाकृती सरूप आहेत व अब, फग ह्यांस सजातीय आहे, तर या बहुकोणाकृतींचे सरूप त्रि॰ समान पडतात आणि त्यांचें गुणोत्तर बहुकोणाकृतीचे गुणोत्तराबरोबर आहे, व अब आणि फग यांचे गुणोत्तराचे वर्गाबरोबर बहुकोणाकृतींचें गुणोत्तर आहे.

कारण बई, ईक, गल, लह सांध. अबकडई आणि फगहसल या दोन आकृति सरूप आहेत ∴ (६व्या॰ प्र॰) ∠अ = ∠फ आहे आणि अब : अई :: फग : फल आहे ∴ (६बु॰ ६सि॰प्र॰) बअई आणि गफल हे △ समकोण आहेत ∴ (६बु॰ ४सि॰प्र॰) ते सरूप आहेत ∴ ∠अबई = ∠फगल आणि बहुकोणाकृति सरूप आहेत ∴ ∠अबक = ∠फगह आहे; तेव्हां (२ म॰ प्र॰) ∠ईबक = ∠लगह आहे. अबई आणि फगल हे दोन △ सरूप आहेत ∴ ईब : अब :: लग : फग परावर्तनानें ईब : लग :: अब : फग बहुकोणाकृति सरूप आहेत ∴ अब : बक :: फग : गह परावर्तनानें अब : फग :: बक :: गह (५बु॰ ४सि॰ प्र॰) ईब : लग :: बक : गह परावर्तनानें ईब : बक :: लग : गह तेव्हां ईबक, लगह हे दोन △ समकोण व सरूप आहेत. या प्रमाणें ईकड, लहस हे त्रि॰ समकोण व सरूप आहेत ∴ अबकडई आणि फगहसल या दोन सरूपाकृतिचे सरूप △ समान पडले. हें सिद्ध.

अबई आणि फगल हे △ सरूप आहेत ∴ यांचें गुणोत्तर (६ बु॰ १०. सि॰ प्र॰) ब ई आणि ग ल यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर आहे. तसें

बईक आणि गलह या दोन △ चें गुणोत्तर ब ई आणि गल यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर आहे ∴ (५ बु॰ ११ सि॰ प्र॰) अबई △ : फगल △ :: बईक △ : गलह △ असें च सिद्ध झालें कीं, बईक △ : गलह △ :: ईफड △ : लहस △ (५ बु॰ १२ सि॰ प्र॰) अबई △ : फगल △ :: अबकडई ○ : फगहसल ○, अब आणि फग यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर अबई आणि फगल या दोन △ चें गुणोत्तर आहे ∴ अब आणि फग यांचे गुणोत्तराचे वर्गा बराबर अबकडई आणि फगहसल यांचें गुणोत्तर आहे. हें सिद्ध.

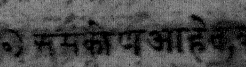
१ कु॰ सर्व सरूपाकृति परस्परांस आहेत. जसें त्यांचा समानीय बाजूंचे वर्ग.

२ कु॰ तीन रेघा प्रमाणांत असल्यास पहिल्या रेघेस : तिसरी रेघ :: पहिल्या रेघेवरील सरळ रेघाकृति : दुसऱ्या रेघेवरील सरूप सरळ रेघाकृति.

एकतिसावा सिद्धांत.

जा सरळ रेघाकृति दुसऱ्या एका सरळ रेघाकृतीशीं सरूप आहेत, त्या परस्पर सरूप आहेत.

अ आणि ब सरळ रेघाकृति क सरळ रेघाकृतीशीं सरूप असतील, तर अ आणि ब या सरूप होतील.

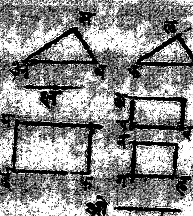


अ आणि क सरूप आहेत ∴ (६ व्या॰ प्र॰) समकोण आहेत, व त्यांचा समकोणाच्या बाजू प्रमाणांत आहेत. तसेंच, क समकोण

आहेत,त्यांचा समकोणाचा बाजू प्रमाणांत आहेत. (५ बु० ४ सि० म०) अ आणि ब आकृति सरूप आहेत हें सिद्ध.

बेविसावा सिद्धांत.

जा चार सरळरेघा परस्पर प्रमाणांत असतात, त्यांवर सजातीय सरूपाकृति काढिल्या असतां त्या परस्पर प्रमाणांत असतात. आणि चार सरळरेघांवर काढिलेल्या सरूपाकृति प्रमाणांत असल्यास त्या चार रेघा परस्पर प्रमाणांत असतात.



अब, कड, ईफ आणि गह या चार रेघा परस्पर प्रमाणांत आहेत. ह्मणजे अब : कड :: ईफ : गह तर अब आणि कड या रेघांवर स अब आणि ल कड तसेंच ईफ आणि गह रेघांवर म फ आणि न ह यांस जातीय सरूपाकृति काढिल्या आहेत, तर स अब : ल कड :: म फ : न ह होईल.

(६ बु० ११ सि० म०) अब, कड रेघांचें तिसरें पद क्ष रेघ काढ, आणि ईफ, गह यांचें तिसरें पद ओ रेघ काढ. अब : कड :: ईफ : गह असें आहेत (५ बु० ४ सि० म०) कड : क्ष :: गह : ओ. (५ बु० ११ सि० म०) अब : क्ष :: ईफ : ओ परंतु (६ बु० २० सि० २ कु० म०) अब : क्ष :: स अब : ल कड आणि ईफ : ओ :: म फ : न ह ∴ स अब : ल कड :: म फ : न ह हें सिद्ध.

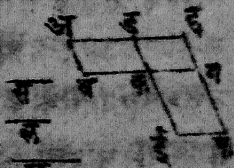
उलटप्रकार. (६ बु० १२ सि० म०) अब, कड आणि ईफ यांचें चवथें पद पर काढ, आणि (६ बु० १८ सि० म०) म फ शीं किंवा न ह शीं सरूप चार आकृति पर रेघेवर काढ, आतां अब : कड :: ईफ : पर असें आहे, व अब आणि कड रेघांवर सरूप व सारख्या स्थित स अब आणि ल कड सरळरेघाकृति काढिल्या आहेत, तत्रा-

च्च ईफ आणि पर यांवर मफ आणि ञार सरूपाकृतिकाढि ल्या आहेत ∴ स अब : लकड :: मफ : ञार आणि (प्रतिज्ञेप्र०) स अब : लकड :: मफ : नह ∴ मफ चें नह आणि ञार यांशीं समान गुणोत्तर आहे ∴ (५ बु० ९सि० प्र०) नह = ञार आहे ∴ गह = पर ∴ अब : कड :: ईफ : पर अ० गह हें सिद्ध.

तेविसावा सिद्धांत.

समकोणस० चौ० चें गुणोत्तर त्यांचा बाजूंचा गुणोत्तरांचा गुणाकाराबरोबर असतें.

अक आणि कफ असे दोन समकोणस० चौ० आहेत, व अक चा ∠ बकड = कफ चा ∠ ईकग आहे त्यास अक, कफ यांचें गुणोत्तर त्यांचा बाजूंचा गुणोत्तरांचा गुणाकाराबरोबर होईल.



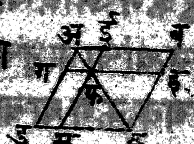
बक, कग या बाजू एकेसरळरेघेंत येतील असे बेस० चौ० ठेव. (१ बु० १४सि० प्र०) क स्थळावरील कोन परस्पर बराबर आहेत. डग स० चौ० पूर्ण कर. एक स रेघ घे आणि (६ बु० १२सि० प्र०) बक, कग आणि स यांचें चवथें पद ल काढ. तसें च डक, कई आणि ल यांचें चवथें पद म काढ. तेव्हांस आणि ल रेघांचें गुणोत्तर बग आणि कग यांचें गुणोत्तराबराबर आहे. व ल आणि म यांचें गुणोत्तर डक आणि कई यांचे गुणोत्तराचे बराबर आहे. स आणि म यांचें गुणोत्तर स आणि ल व ल आणि म यांचे गुणोत्तरांचे गुणाकारा बराबर आहे. स आणि म यांचें गुणोत्तर कब आणि कग व डक आणि कई यांच्या गुणोत्तरांचे गुणाकाराबराबर आहे. (६ बु० १सि० प्र०) बक : कग :: अक : कह परंतु बक : कग :: स : ल ∴ (५ बु० ११सि० प्र०) स : ल :: अक : कह

डक:कई::कह:कफ; परंतु डक:कई::ल:म असें आहे ∴ ल:म::कह:कफ स:ल:: अक:कह, ल:म::कह:कफ असें सिद्ध झालें ∴ (५ बु॰ ११ सि॰ प्र॰) स:म:: अक:कफ (वरसिद्धके॰ प्र॰) स आणि म यांचें गुणोत्तर अक आणि कफ या स॰ चौ॰ चे गुणोत्तरांचे गुणाकाराबराबर आहे ∴ अक आणि कफ यांचें गुणोत्तर त्यांचा बाजूंच्या गुणोत्तरांच्या गुणाकाराबराबर आहे. हें सिद्ध.

कुर॰ दोन चतुःप्रमाणांतील प द रेषा असल्यास, त्यांचा सरूप पदांचे स॰ चौ॰ ही प्रमाणांत असतात. . . . . ह॰ ७५

चव्विसावा सिद्धांत.

स॰ चौ॰ न त्याची कर्णरेघ जांतून जाते असे जे स॰ चौ॰ पडतात, ते मोठ्या स॰ चौ॰ शीं व परस्परांशीं सरूप असतात.



अबकड स॰ चौ॰ ची कर्णरेघ अक आहे, आणि तीं ईग, हस या दोन स॰ चौ॰ तून जात्ये, त्यास ते स॰ चौ॰ अबकड स॰ चौ॰ शीं व परस्परांशीं सरूप होतील.

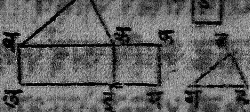
(१ बु॰ २९ सि॰ प्र॰) <अडक =<अगफ आणि <अबक=<अईफ आहे (१ बु॰ २९ सि॰ प्र॰) <बकड आणि <ईफग हे प्रत्येकीं <डअब या बराबर आहेत ∴ <बकड =<ईफग आहे ∴ बड आणि ईग स॰ चौ॰ समकोण आहेत, अबक आणि अईफ हे दोन △ समकोण आहेत ∴ (६ बु॰ ४ सि॰ प्र॰) अब:बक::अई:ईफ, स॰ चौ॰ च्या समोरासमोरच्या बाजू परस्पर बराबर असतात ∴ अब:अड::अई:अग व डक:बक::गफ:ईफ आणि डक:डअ::फग:गअ बड आणि ईग यांच्या बराबर कोनाच्या बाजू प्रमाणांत आहेत ∴ (६ बु॰ ६ सि॰ प्र॰) ते परस्पर सरूप आहेत तसेंच बड आणि हस हे सरूप आहेत.

ईग आणि हस हे स॰चौ॰ व ड शीं सरूप आहेत ∴ (६ बु॰ १ सि॰ म॰) हस स॰चौ॰ ईग स॰चौ॰ शीं सरूप आहे हें सिद्ध.

पंचविसावा सिद्धांत.

दिलेल्या दोन सरळरेषाकृतीं पैकीं एका आकृतीशीं सरूप व दुसरे आकृतीशीं समान अशी एक सरळरेषाकृति काढावयाची.

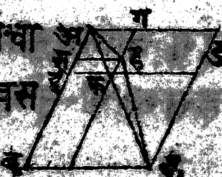
अबक आणि ड अशा दोन सरळरेषाकृति आहेत, तर अबक शीं सरूप व ड शीं समान अशी एक आकृति काढावयाची.



(१ बु॰ ४५ सि॰ कु॰ म॰) बक रेषेवर अबक शीं समान व ई स॰चौ॰ कर (१ बु॰ ४४ सि॰ म॰) कई रेषेवर ड शीं समान व ज्याचा (फकई) कोन बल होईल असा कम स॰चौ॰ कर. (६ बु॰ १३ सि॰ म॰) बक आणि कफ यांचें मध्यपद गह रेष काढ. आणि तिजवर (६ बु॰ १८ सि॰ म॰) अबक आकृतीशीं सरूप सगह आकृति काढ. बक, गह, कफ या प्रमाणांत आहेत, म्हणजे बक : गह :: गह : कफ (६ बु॰ २० सि॰ २ कु॰ म॰) बक : कफ :: अबक : सगह परंतु (६ बु॰ १ सि॰ म॰) बक : कफ :: बई : ईफ (५ बु॰ ४ सि॰ म॰) अबक : सगह :: बई : ईफ आतां अबक आकृति बई शीं समान आहे, व सगह आकृति ईफ शीं समान आहे ईफ आकृति ड आकृती बरोबर आहे ∴ सगह, ड शीं समान आहे. आणि ती अबक शीं सरूप आहे ∴ अबक शीं सरूप व ड शीं समान अशी सगह आकृति झाली हें सिद्ध.

सविसावा सिद्धांत.

जर दोन सरूप स॰चौ॰स एक कोन साधारण असेल व ते सादृश्यस्थित असतील, तर त्यांचा कर्ण रेषा एका सरळरेषेंत येतील.



अबकड आणि अईफग हे स॰ चौ॰ आहेत, त्यांचा <ड अब साधारण आहे, तर त्यांचा कर्णरेघा एकेचस्त रेषेंत येतील.

अक कर्णरेघ फ बिंदूंतून जात नसेल, तर ह बिंदूंतून जाते असें मानून ह बिंदूंतून अग शीं हस समांतर. (६ बु॰ २४ सि॰ प्र॰) बड आणि सग सरूप आहेत॰ (८ व्या प्र॰) अह: अब :: अग: अस, अबकड आणि अईफग सरूप आहेत॰ अड: अब :: अग: अई ॰ (५ बु॰ ४ सि॰ प्र॰) गअ: अई :: गअ: अस तेव्हां (५ बु॰ २ सि॰ प्र॰) अस = अई; परंतु तुकडा सर्वांस बरोबर हो तो हें अशक्य॰ अबकड स॰ चौ॰ ची कर्णरेघ अह करेषेंत नाहीं॰ अफ रेषेंतच आहे॰ हें सिद्ध॰

सत्ताविसावा सिद्धांत.

रेघेचे कसेही दोन भाग केले असतां त्यांचा का॰ चौ॰ अर्धरेघेच्या चौरसापेक्षां लहान असतो.

अब सरळरेघेचे अड आणि बड हे दोन विषम अ क ड ब भाग केले, आणि अक, बक हे दोन सम भाग केले, तर अड॰ बड हा का॰ चौ॰ अक हून उणा होईल.

(२ बु॰ ५ सि॰ प्र॰) अड॰ बड + कड² = अक² यावरून स्पष्ट होते कीं, अड॰ बड, अक हून लहान आहे॰ हें सिद्ध.

अठ्ठाविसावा सिद्धांत.

दिलेल्या रेघेचे असे दोन भाग करकीं, त्यांचा का॰ चौ॰ दिलेल्याशी बरोबर होईल परंतु दिलेलें क्षेत्र दिलेल्या रेघेचा अर्धाचा वर्गापेक्षां जास्त असूं नये

अब दिलेली रेघ आहे, क रेघेचें चौरस दिलेलें क्षेत्र आहे, तर अब रेघेचे असे दोन खंड पाडकीं, त्यांचाकाटकोनी चौ· क रेघेच्या वर्गाबरोबर होईल·

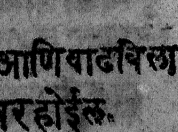


अब रेघ ड स्थळीं दुभाग आणि त्यास्थळीं कचे बरोबर अब रेघेवर डई लंबकर आणि ईड, फ पर्यंत वाढीव असी कीं, ईफ = अड होईल· नंतर ईफ त्रिज्येनें एक वर्तुळकर· तें अब रेघेस ग स्थळीं छेदील. ग, ई सांध· (२बु·५सि·प्र·) अड^२ = अग·बग + डग^२ परंतु अड = ईग = ईफ आहे ∴ ईग^२ = अग·बग + डग^२ (१बु·४७सि·प्र·) ईग^२ = ईड^२ + डग^२ तेव्हां ईड^२ + डग^२ = अग·बग + डग^२ यांतडग^२ साधारण वजा जातां ईड^२ = अग·बग परंतु ईड^२ = क^२ आहे ∴ क^२ = अग·बग ह्मणजे अबरेघेचे अग आणि बग हे इच्छिले खंड झाले· हें सिद्ध·

एकुणतिसावा सिद्धांत·

एक रेघ असी वाढीवकीं, वाढविल्यावर्‍हां सर्व रेघ आणि वाढविला खंड यांचाकाटकोनी चौ· दुसऱ्या दिलेल्या रेघेचा वर्गाबरोबर होईल·

अब आणि क या दोन रेघा दिल्या आहेत, तर अब रेघ इतकी वाढीव कीं, अग·बग = क^२ होईल·



अब रेघ ड स्थळीं दुभागून, तिचे शेवटावर ब स्थळीं क रेघेबरोबर बई लंबकर· आणि ड, ई सांधून त्या त्रिज्येनें ड मध्य करून, फईग ⊙ कर. अब रेघ परिघास ग स्थळीं मिळे पर्यंत वाढीव. (२बु· ६सि·प्र·) डग^२ = अग·बग + बड^२ डग = डई आहे ∴ डई^२ = अग·बग + बड^२ परंतु (१बु·४७सि·प्र·) डई^२ = बड^२ + बई^२ ∴ बड^२ + बई^२ = अग·बग + बड^२, साधारण बड^२ वजा करितां बई^२ = अग

×बग परंतु बई^{२}=क^{२} आहे ∴ अग×बग=क^{२} हें सिद्ध.

तिसावा सिद्धांत. ह॰ कृ॰ २६

दिलेल्या रेघेचे अंत्यमध्य प्रमाणानें खंड करावयाचे.

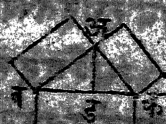
अब दिलेली रेघ आहे, हीचे अंत्यमध्य प्रमाणानें खंड करावयाचे.



अब रेघेवर बक वर्ग कर (६ बु॰ २९ सि॰ म॰) अक रेघ ड पर्यंत वाढीव अशी कीं, कड॰ अड = अक^{२} होईल. अड = अई करून डफ का॰ चौ॰ पूर्ण कर कड॰ अड = अक^{२} ∴ डफ का॰ चौ॰ = बक चौरस आहे. दोन्ही पेट्यांतून अफ का॰ चौ॰ वजा कर, तेव्हां डई वर्ग बफ का॰ चौ॰ चे बरोबर आहे; परंतु बफ का॰ चौ॰ अब, बई रेघांनीं झाला आहे ∴ (६ बु॰ १७ सि॰ म॰) अब आणि बई यांचे मध्यपद अई आहे. म्हणजे अब : अई :: अई : बई तेव्हां (६ १ व्या॰ म॰) अब रेघेचे ई स्थळीं अंत्य मध्य प्रमाणानें खंड पडले. हें सिद्ध.

एकतिसावा सिद्धांत.

का॰ त्रि॰ त कर्णावर सरळरेषाकृति काढून, तिशीं सरूप त्या प्रमाणें अशा दुसऱ्या दोन बाजूंवर सरळरेषाकृति काढिल्या; तर त्यांची बेरीज कर्णावरील आकृतीबरोबर होईल.



अबक का॰ त्रि॰ च्या बक कर्णावरील सरळरेषाकृतीशीं सरूप व त्या प्रमाणें स्थित अशा अब, अक या बाजूंवर काढिलेल्या आकृतींची बेरीज त्या पूर्वे आकृती बरोबर होईल.

अड लंब कर. (६ बु॰ ८ सि॰ म॰) बअड आणि अकड हे △अबक △शीं व परस्परांशीं सरूप आहेत ∴ (६ बु॰ ४ सि॰ म॰) बक : अब :: अब : बड ∴ बक, अब आणि बड प्रमाणांत आहेत ∴ (६ बु॰ २ सि॰

कु॰म॰) बक : बड :: बक वरील आकृतीस : अब वरील आकृति, व्यस्तानें बड : बक :: अब वरील आकृतीस : बक वरील आकृति. याप्रमाणें डक : बक :: अक वरील आकृतीस : बक वरील आकृति ∴ बड + डक : बक :: अब वरील आकृति + बक वरील आकृतीस : बकवरील आकृति; परंतु बड आणि डक यांची बेरीज बक आहे ∴ अब आणि अक यांवरील आकृतीची बेरीज बक वरील आकृती बरोबर आहे. हें सिद्ध.

बत्तिसावा सिद्धांत.

जा दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत ते, त्यांचा त्या सजातीय बाजू परस्परांशीं स॰ होतील अशा तऱ्हेनें लावून ठेविले असतां, त्यांचा तिसऱ्या बाजू ही एका सरळ रेषेंत येतील.



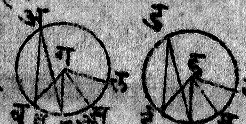
अबक आणि डकई या दोन △त एकाचा अब, अकबाजू दुसऱ्याचा डक, डई बाजूंशीं प्रमाणांत आहेत म्हणजे बअ : अक :: डक : डई आणि हे दोन △ क कोनाजवळ असे लावून ठेवकीं, अब शीं डक आणि अक शीं डई स॰ होतील. तेव्हां बक आणि कई या दोन बाजू एकेच सरळ रेषेंत येतील.

अब, डक आणि अक, डई स॰ आहेत ∴ (१बु॰२९सि॰म॰) <अ = <अकड आणि <अकड = <ड ∴ (१म॰प्र॰) <अ = <ड आहे. आणि अब, अक या बाजू डक, डई यांशीं प्रमाणांत आहेत ∴ (६बु॰६सि॰म॰) अबक आणि डकई हे दोन △ परस्पर समकोण आहेत. <ब = <डकई आहे व <अ = <अकड ∴ सर्व <अकई = <अ + <ब आहे. या दोनही पेट्यांत <अकब मिळविला असतां <अकई + <अकब

=<अ+<ब+<अकब आहे; परंतु (१बु०३२सि०म०) <अ+<ब+<अकब=२का० ∴ <अकई+<अकब=२का० तेव्हां (१बु०१४सि०म०) बक आणि कई मिळून एक सरळ रेघ आहे. हें सिद्ध.

तेतिसावा सिद्धांत.

समान वर्तुळांत मध्यकोन किंवा परिघकोन यांचें गुणोत्तर, तेजा-कोंसावर असतात त्यांचा गुणोत्तरा बरोबर आहे, व त्या कोंसांचें-गुणोत्तर सेकतोराचे गुणोत्तरा बरोबर आहे.



अबक आणि डईफ या दोन समान ⊙त बगक आणि ईहफ हे मध्यकोन वब अक आणि ईडफ हे दोन परिघकोन बक आणि ईफ कोंसावर असतील तर बक : ईफ :: <बगक : <ईहफ :: <बअक : <ईडफ :: बगक सेकतोरास : ईहफ सेकतोर होईल.

कस आणि सल हे कोंस प्रत्येकीं बक कोंसा एवढे कर, आणि फम, मन हे कोंस प्रत्येकीं ईफ एवढे कर, गस गल हम हन सांध. बक, कस आणि सल हे कोंस बराबर आहेत ∴ (३ बु०७ सि०म०) या कोंसांनीं मापने कोन बगक, कगस, सगल हे बराबर आहेत ∴ बल कोंस बक कोंसाचा जितके पट मोठा आहे, तितके पट <बगल, <बगकचा आहे. याप्रमाणेंच ईन कोंस ईफ कोंसाचा जितके पट आहे, तितके पट <ईहन, <ईहफचा आहे. बल कोंस ईन कोंसाचा बराबर, मोठा, अ० लहान असल्यास <बगल <ईहन चा अनुक्रमें बराबर, मोठा अ० लहान होईल ∴ (६०व्या०म०) बक : ईफ :: <बगक : <ईहफ (३ बु० २०सि०म०) <बगक, <बअक चा दुप्पट आहे. तसें <ईहफ <ईडफचा दुप्पट आहे ∴ बक : ईफ :: <बअक : <ईडफ हें सिद्ध

आतां बक कोंस : ईफ कोंस :: बगकसेकतोरास : ईहफसेकतो
र होईल. बक कस सांध. बक, कस या दोन कोंसांत क्ष आणि ओ
दोन बिंदु घेऊन बक्ष क्षक, कओ ओस सांध. (१७ु० ४सि० म०)
बगक आणि कगस हे दोन △ एकरूप. ∴ बक पाया = कस पाया आ
हे, बक कोंस ∴ कस कोंस आहे. ∴ बअक आणि कअस हे कोंस ब
रोबर आहेत ∴ <बक्षक = <कओस आहे ∴ बक्षक ○ खंड कओ
स ○ खंडाशीं सरूप आहे, आणि हे दोन खंड समान रेषांवर आहेत
∴ (२३ु० २४सि० म०) ते परस्पर बरोबर आहेत ∴ बक्षक ○ खंड =
कओस ○ खंड आहे ∴ बगकसेकतोर = कगस सेकतोर आहे.
या प्रमाणेंच सगळ, बगक आणि कगस हे सेकतोर बरोबर आ
हेत. असेंच ईहफ, फहम आणि महन हे सेकतोर परस्पर बरोबर
आहेत ∴ बल कोंस कव चा जितकेपट आहे, तितकेपट बगल सेक
तोर बगकसेकतोराचा आहे. तसेंच ईन कोंस ईफ चा जितकेपट
आहे, तितकेपट ईहन सेकतोर ईहफ सेकतोराचा आहे ∴ बक
कोंस ईफ कोंसाशीं ज्या प्रमाणानें आहे, त्याच प्रमाणानें बगक सेक
तोर ईहफ सेकतोराशीं आहे. हें सिद्ध.

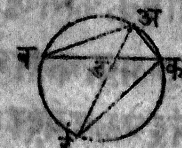
१ कु० एकाच वर्तुळाचे किंवा समान वर्तुळांचे सरूप सेकतोर समा
न असतात.

२ कु० वर्तुळमध्याजवळचा कोनास जर चार का० तर तो कोन ज्या
कोंसावर आहे त्या कोंसास वर्तुळाचा परिघ.

ब सिद्धांत. ह० ६९

जी रेघ त्रिकोणाच्या कोणत्याही कोन दुभागिते, तिचा वर्ग आणि त्या रे
घेनें केलेले पायाचे दोन खंडांचा का० चौ० दुसऱ्या दोन बाजूंचे का० चौ०

बरावर आहे.

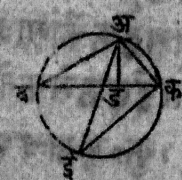


अबक △ त अड रेघ अ कोनास दुभागिते, तर अड²+बड·कड=बक·अब होईल.

अबक △ भोंवती (४ बु॰ ५ सि॰ प्र॰) अबईक ⊙ कर, अड परिघाव र ई पर्यंत वाढीव, आणि क, ई सांध. ∠बअड=∠डअक आणि (२ बु॰ २१ सि॰ प्र॰) ∠ब=∠ई तेव्हां अबड, अईक हे दोन △ समकोण आहेत, ∴ (६ बु॰ ४ सि॰ प्र॰) अब: अड:: ईअ: अक (६ बु॰ १६ सि॰ प्र॰) अब·अक= अड·ईअ (२ बु॰ ३ सि॰ प्र॰) अड· अई=अड²+ अड·डई (२ बु॰ ३५ सि॰ प्र॰) अड·डई=बड·डक आहे ∴ बअ·अक = अड²+बड·कड हें सिद्ध.

क सिद्धांत. .... ह॰ ६४

त्रिकोणाचा शिरकोना पासून पायावर लंब केला असतां, तो लंब आणि त्रिकोणाचे बाहेरील वर्तुळाचा व्यास यांचा का॰ चौ॰ दुसऱ्या दोन बाजूचे का॰ चौ॰ बराबर आहे.

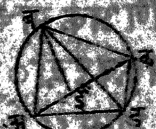


अबक △ चे बाहेरील ⊙ चा व्यास अई आणि बक बाजूवर समोरचा अ कोनापासून अड लंब केला आहे, तर अब· अक=अड· अई होईल.

ई, क सांध. अबड आणि अकई या दोन △ त ∠ड का॰ =∠अकई आहे, कारण (३ बु॰ ३१ सि॰ प्र॰) हाही का॰ च आहे (३ बु॰ २१ सि॰ प्र॰) ∠ब=∠ई ∴ अबड आणि अकई हे दोन △ परस्पर समकोण आहेत. ∴ (६ बु॰ ४ सि॰ प्र॰) बअ: अड:: ईअ: अक (६ बु॰ १६ सि॰ प्र॰) अब·अक=अड·अई हें सिद्ध.

ड सिद्धांत वृ ६९

वर्तुळांतील चौ॰ च्या दोन कर्णांचा का॰ चौ॰ त्या चौ॰ च्या समोरासमोरच्या बाजूंचा का॰ च्यौ॰ बराबर आहे.



वर्तुळांत अबकड चौबाजू आहे, ज्याचा अक आणि बड कर्णरेघा आहेत; तर अक॰बड=बक॰अड+अब॰डक होईल.

बई रेघ कर अशी कीं, <अबई=<डबक होईल. आतां <अबई आणि <कबड या दोन कोनांत <ईबड मत्येकीं मिळीव, तेव्हां <अबड=<ईबक (२बु॰२१सि॰म॰) <बडअ=<बकअ ∴ अबड आणि कबई हे दोन △ समकोण आहेत. तसेंच अबई आणि डबक हे दोन △ समकोण ∴ (६बु॰ ४,१६सि॰म॰) बक॰ अड=कई॰बड आणि अब॰डक = अई॰बड आहे. आतां या दोनही समीकरणांची बेरीज घेऊन बक॰अड+अब॰कड=कई॰बड+ अई॰बड परंतु कई॰बड+अई॰बड=अक॰बड आहे ∴ बक॰अड+अब॰डक=अक॰बड हें सिद्ध.

ई सिद्धांत.

वर्तुळखंडाचे दोन समान भाग करून, छेदनबिंदु व पायाचीं दोन टोकें यांपासून वर्तुळाच्या परिघांतील कोणत्याही एका बिंदूपर्यंत रेघा केल्या असतां पायाच्या दोन टोकांपासून काढिलेल्या दोन रेघांची बेरीज आणि छेदन बिंदूपासून काढिलेली रेघ यांचें गुणोत्तर वर्तुळखंडाचा पाया आणि वर्तुळखंडाच्या अर्धाचा पाया यांचे गुणोत्तरा बराबर आहे.

अबड○ चा अब खंड आहे आणि त्याचे कस्थचीं दोन समा

नभागकेले आहेत, अ,क,ब यातीन बिंदूपासून ड बिंदूपर्यंत अड,कड आणि बड रेषा काढिल्या आहेत, त्यास अड + बड आणि कड यांचे गुणोत्तर अब आणि अक यांचे गुणोत्तरा बरोबर आहे.

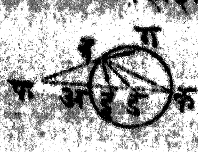


अकबड हा ⊙ तचौ. आहे, आणि त्याचा अब, कड कर्णरेषा आहेत, त्यास (६ बु॰ ड सि॰ म॰) अड·बक + बड·अक = कड·अब; परंतु अक = बक आहे ∴ अड·अक + बड·अक = कड·अब. (२ बु॰ १ सि॰ म॰) अड·अक + बड·अक = (अड + बड)·अक = कड·अब ∴ (६ बु॰ १४ सि॰ म॰) अड + बड : कड :: अब : अक. हें सिद्ध.

फ सिद्धांत.

वर्तुळाचा व्यासांत असे दोन बिंदु घेतले कीं, ते दोन बिंदु आणि वर्तुळमध्य यांचा मधील जे खंड पडतील त्याचा का॰ चौ॰ अर्धव्यासाचा वर्गा बरोबर होईल, तर त्या दोन बिंदूपासून वर्तुळपरिघांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत रेषा केल्या तर त्यांचे गुणोत्तर पूर्वोक्त दोनही बिंदु व परिघ यांचे मध्यें जे व्यासाचे खंड पडतात, त्यांचा गुणोत्तरा बराबर होईल.

अबक एक ⊙ आहे, आणि त्याचा ड मध्य आहे,



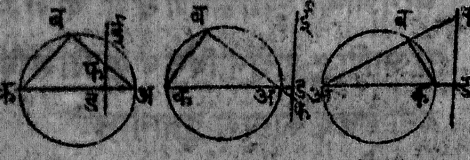
कअ व्यास वाढवून, त्यांत ई आणि फ बिंदु घेतले आहेत कीं, डफ·ईड = अड होईल. फ आणि ई बिंदूपासून परिघांतील ब बिंदूपर्यंत फब आणि ईब रेषा केल्या आहेत, तर बफ : बई :: फअ : अई होईल.

ब,ड सांध. (प्रतिज्ञेवरून) फड·ईड = अड आहे व अड = बड आहे, त्यास (६ बु॰ १७ सि॰ म॰) फड : बड :: बड : डई आहे ∴ (६ बु॰ ६ सि॰ म॰) फडब आणि ईडब हे दोन △ समकोण आहेत ∴ (६ बु॰ ४ सि॰ म॰)

फब : बड :: बई : ईड (५ बु० ५ सि० म०) फब : बई :: बड : ईड, बड = अड आहे ∴ फब : बई :: अड : ईड, फड : अड :: अड : डई हें चतु: प्रमाण आहे. (५ बु० ८ सि० म०) फअ : अड :: अई : बई परावर्तनानें फअ : अई :: अड : अई, फब : बई :: अड : डई असें वर सिद्ध केलें आहे ∴ (५ बु० ४ सि० म०) फब : बई :: फअ : अई हें सिद्ध.

ग सिद्धांत.

वर्तुळाच्या व्यासाच्या एका टोंकापासून ज्या केली आणि ज्या व व्यास यांस आंतील किंवा बाहेरील अंगानें छेदणारा असा व्यासावर एक लंब केला, तर व्यास व व्यासाच्या टोंकापासून ज्या केली आहे त्या अंगच्या भागाच्या खंडयांच्या का० चौ० ज्या आणि तिचा अनुरूप खंड यांचे का० चौ० बराबर आहे.



अबक ⊙ चा व्यास अफ आहे, आणि त्याच्या अ टोंकापासून अब ज्या केली आहे, व व्यासावर डई लंब केला आहे, तो फ स्थळीं ज्येस छेदितो, त्यास अक · अड = अब · अफ आहे.

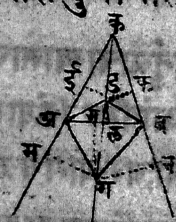
ब, क सांध. ∠अडफ का० आहे व (२ बु० ३१ सि० म०) ∠ब का० आहे. बअक आणि फअड या दोन △ त ∠ब = ∠अडफ, ∠बअक = ∠फअड ∴ (१ बु० ३२ सि० २ कु० म०) हे दोन △ समकोणा आहेत ∴ (६ बु० ४ सि० म०) अब : अक :: अड : अफ ∴ (६ बु० १६ सि० म०) अक · अड = अब · अफ हें सिद्ध.

कुर० अबक △ ची अर्धपरिमिति कम अ० कन याचे बराबर आहे. त्यास त्याचे बराबर ह मानिला, तर कई खंड ह − अब पाया याचे बराबर आहे. अई खंड ह − अक बाजू याचे बराबर आहे. अम

खंड ह —अक बाजूं बराबर आहे.

ह सिद्धांत.

त्रिकोणाचा पाया कडील दोन कोनांस दुभागणाऱ्या रेघा जास्थळीं मिळतात तो बिंदु व दोन बाजू वाढवून पायाचा बाहेरील कोनांस दुभागणाऱ्या रेघांचा छेदनबिंदु आणि शिरोबिंदु हे एका सरळ रेघेंत येतील. आणि ती सरळ रेघ शिरकोनास दुभागील.



अबक △ चा पायाकडील अ आणि ब कोनास दुभागणाऱ्या अड आणि बड या रेघा ड स्थळीं परस्परांस मिळतात. अक, बक वाढवून पायाचे बाहेरील अ आणि ब कोनास दुभागणाऱ्या अग आणि बग या ग स्थळीं परस्परांस मिळतात; तर— ग आणि ड हे दोन बिंदु व क शिरोबिंदु हे एकेच सरळ रेघेंत येतील. व ती रेघ क कोनास दुभागील.

डई, डफ, डल, गम, गस आणि गन हे लंबकर.

(सिद्धांत) { अडई △ अडल △ शीं; बडफ △ बडल △ शीं; अमग △ असग △ शीं; बसग △ बनग △ शीं } एकरूप ∴ { डई = डल; डल = डफ; गम = गस; गस = गन } ∴ { डई = डफ; गम = गन }

(१ बु॰ क॰ सि॰ म॰) कईड △ कफड △ शीं, कमग △ कनग △ शीं एकरूप ∴ <ईकड = <फकड आणि <मकग = <नकग तेव्हां <क चे कड, कग रेघांनीं बराबर दोन भाग होतात; यावरून कह रेघ कग रेघेंत आहे हें सिद्ध.

ल सिद्धांत

त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ बाजूंचा परिमितीचें अर्धबतें अर्ध आणि याचा यांची वजा बाकी यांचा का॰ चो॰ व परिमितीचें अर्ध व इतर बाजू यांचा वजा बाक्यांचा का॰ चो॰ यांचे मध्य प्रमाण आहे.

(ह सिद्धांताची आकृति)

अबक △ त बाजूंचे परिमितीचें अर्ध ह असेल तर ह (ह-अब) आणि (ह-अक)·(ह-बक) यांचें मध्य प्रमाण त्या △ चे क्षेत्रफळ आहे.

(१ बु॰ २९ सि॰ प्र॰) ईड, मगवीं स॰ आहे ∴ कई : ईड :: कम : मग आणि कम : कम :: डई : डई : (६ बु॰ २२ सि॰ कु॰ प्र॰) कई · कम : ईड · कम : कम · ईड : मग · ईड, अबक △ = अबड △ + अडक △ + कडब △ आहे (बु॰ ४१ सि॰ प्र॰) अडब △, अडक △ आणि कडब △ हे अब · डल, अक · डई आणि बक · डफ यातील का॰ चो॰ चे अर्धा बरोबर आहेत, परंतु ही सर्व अर्धे मिळून कम · ईड का॰ चो॰ ब॰ रावर आहेत ८ ईअल + ८ मअस = २ का॰ ∴ ८ ईअड + ८ म अग = १ का॰ (१ बु॰ ३२ सि॰ प्र॰) ८ अगम + ८ मअग = १ का॰ ∴ ८ ईअड + ८ मअग = ८ अगम + ८ मअग ∴ ८ ईअड = ८ अगम, ई आणि म या बिंदूजवळचे कोन का॰ आहेत ∴ अगम आणि ईअड हे △ सरूप आहेत, तेव्हां अई : ईड :: मग : मअ ∴ अई · अई = ईड · मग ∴ पूर्वी सांगितलेलें चतुःप्रमाण कम · कई : अबक :: अबक : अग - अई ∴ ह (ह-अब) : अबक :: अबक : (ह-अक) · (ह-अब) हें सिद्ध.

टीप- त्रिकोणाच्या तीन बाजूं पासून क्षेत्रफळ या पासून काढितां येतें.

सहाव्याबुकाचे प्रश्न.

१ तीन समांतर रेषांस जा रेषा छेदितात, त्याचे खंड प्रमाणांत असतात.

२ जर एका रेषेचे असे तीन भाग केले कीं, मधला खंड व नी सर्व रेषयांचा का० चौ० शेवटील दोन खंडांचा का० चौ० बरोबर असेल, तर नी रेषा गायन प्रमाणांत विभागिली जाईल.

३ वर्तुळाच्या परिघांतील कोणत्याही बिंदू पासून जर त्रिज्येवर लंब केला, आणि त्याच बिंदू पासून त्या वर्तुळास स्पर्शी रेष केली, ती व त्रिज्या मिळत पर्यंत वाढविली; तर मध्य बिंदू पासून लंबा पर्यंत अंतर, व मध्यबिंदू पासून स्पर्श रेषेचा छेदन बिंदू पर्यंत अंतर, या दोहोंचे मध्य प्रमाण त्रिज्या होईल.

४ जर एका ज्येवर निरनिराळ्या वर्तुळांचे कोंस असतील, तर त्या ज्येचा एका शेवटापासून कोंसा पर्यंत रेषा केल्या, तर त्या रेषांमधील कोंसांचे खंड प्रमाणांत होतील.

५ एका सरळ रेषेचे गायन प्रमाणांत खंड कर.

६ अशी एक रेष कर कीं, दिलेल्या दोन रेषांतून पहिल्या रेषेस जर दुसरी रेष, तर पहिल्या रेषेचा वर्गास इच्छिल्या रेषेचा वर्ग होईल.

७ एक रेष काढ अशी कीं, दिलेल्या दोन रेषांतून पहिलीस जर इच्छिली रेष, तर पहिलीचा वर्गास दुसरीचा वर्ग होईल.

८ सांगितलेले कोनाचा असा एक त्रिकोण पाडावयाचा कीं, तो सांगितलेले क्षेत्रा बरोबर होईल.

९ एक त्रि० असा छेद कीं, त्याचाशीं तो समकोन होईल, आणि त्याचा बाजू दिलेल्या प्रमाणांत होतील.

१० दिलेल्या बिंदू पासून वर्तुळांत अशी ज्या कर कीं, जिचे खंड दिले

ले प्रमाणांत होतील.

११ पाया, उंची आणि दोन बाजूंचें प्रमाण यांपासून त्रि॰ करावयाचा.

१२ कोणत्याही त्रि॰ च्या पायाकडील कोनांपासून समोरच्या बाजूंस दुभागणाऱ्या रेघा केल्या, तर त्या परस्परांस २:१ या प्रमाणानें छेदितील.

१३ कोणत्याही त्रि॰ च्या पायाशीं स॰ रेघ केली, आणि पायाकडील कोनांपासून त्या रेघेचीं शेवटें सांधिलीं; व त्या रेघांचा छेदनबिंदु व शिरोबिंदु सांधणारी रेघ पायास दुभागिते. व गायन प्रमाणांत छेदिली जाते.

१४ तीन रेघा परस्पर प्रमाणांत असतील, तर पहिली सजर तिसरी, तर पहिली आणि दुसरी यांचे अंतराचे वर्गास दुसरी आणि तिसरी यांचे अंतराचा वर्ग होईल.

१५ एका वर्तुळांत दोन ज्या परस्परांस छेदितात त्यांपासून जो कोन होतो, तो त्या दोन ज्यांचे अंतर कौंसाचे बेरजेचे अर्धानें मापिला जातो. आणि वर्तुळाचे बाहेर ज्या परस्परांस छेदितात त्यापासून जो कोन होतो तो दोन अंतर कौंसांचे वजाबाकीचे अर्धानें मापिला जातो. इ॰ ३९

१६ कोणत्याही त्रि॰ च्या शिरकोनाचा बाहेरील कोनास दुभागणाऱ्या रेघेस पाया मिळे पर्यंत वाढविला, तर तो वाढविल्या सहित सर्व पाया व वाढविला खंड यांचा का॰ चौ॰ आणि कोन दुभागणाऱ्या रेघेचा वर्ग यांचा वजाबाकी बराबर दोन बाजूंचा का॰ चौ॰ होईल.

१७ एका बिंदूपासून वर्तुळास दोन स्पर्श रेघा व एक छेदनरेघा केली, तर स्पर्शबिंदु सांधणाऱ्या रेघेनें व वर्तुळानें जे खंड झाले, ते गायन प्रमाणांत होतात.

१८ जर कोणत्याही दोन त्रि॰ त प्रत्येकाचा एक एक कोन मिळून दोन का॰ असतील, व दुसरे दोन कोन बराबर असतील, म्हणजे एकाचा एक व

दुसऱ्याचा एक, तर राहिल्या कोनाचा बाजू प्रमाणांत होतील.

१९. समद्विबाजू त्रिं॰चा पायाचा कोणत्या ही बिंदूतून जाणारी रेघ केली अशी कीं, तीन दोन ही बाजूंस वाढविली असतां त्रिकोणाचे एका बाजूचा पाया कडील कोना पासून जेवढा खंड होईल, तेवढा खंड दुसऱ्या बाजूंत मिळविला असतां, जर ती त्या रेघेस मिळेल तर ती रेघ त्या पाया नें दुभागिली जाईल.

२० जर कोणत्या ही त्रिं॰ तील एक बिंदूतून जाणाऱ्या कोना पासून रेघा समोरचे बाजूंस मिळत पर्यंत वाढविल्या, आणि त्यांतील शिरकोना पासून केलेली रेघ पायास जेथें छेदील, त्या बिंदू पासून दुसऱ्या दोन बाजूंचा छेदन बिंदूतून जाणाऱ्या रेघा पायाशीं शिरकोनांतून समांतर असणाऱ्या रेघेस मिळे पर्यंत केल्या, तर ती स॰ रेघ शिरकोन खळीं दुभागिली जाईल.

२१ त्रिं॰चे शिरकोना पासून पायावर लंब करून त्या मध्यें एक बिंदु घेऊन त्यांतून पायाचे दोन टोंका पासून समोरील बाजूंस मिळत अशा रेघा केल्या, तर पायांतील छेदन बिंदूशीं दुसऱ्या दोन बाजूंतील छेदन बिंदूस सांधणाऱ्या रेघांनीं पायाशीं जे कोन पडतात ते समान असतात.

२२ जा रेघा गायन प्रमाणांत असतात त्यांस छेदणाऱ्या रेघांचे गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२३ त्रिं॰त एक बिंदू घेऊन त्यांतून त्रिं॰चा कोण बिंदू पासून समोरील बाजूस मिळत पर्यंत रेघा केल्या आणि छेदन बिंदू सांधले, तर पूर्वी केलेल्या रेघांचे खंड गायन प्रमाणांत पडतात; आणि छेदन बिंदु सांधणाऱ्या रेघा बाजू वाढवून त्यांस मिळविल्या, तर बाजूचें गायन प्रमाणांत खंड पडतात.

२४ त्रि॰च्या आंतील किंवा बाहेरील बिंदूंतून त्रि॰च्ये कोना पासून समोरच्ये बाजूंस मिळत अशा रेघा केल्या आणि त्यांचे छेदन बिंदु सांधणाऱ्या रेघा बाजू वाढवून त्यांस मिळविल्या, तर त्या रेघांचे ते तीन छेदन बिंदु एका सरळ रेघेंत येतील.

२५ अर्धवर्तुळ आणि वर्तुळपाद हीं एकाज्येवर असलीं, तर त्यांचे कोंसामध्यें जें क्षेत्र सांपडतें तें; ज्याची कर्णरेघ ती ज्या आहे अशा समद्विबाजू का॰ त्रि॰ बराबर होईल.

२६ उंची, शिरकोन, आणि दोन बाजूंची बेरीज अ॰ वजाबाकी दिली आहेत, यांपासून त्रि॰ कर.

२७ पाया, उंची, आणि दोन बाजूंची बेरीज अ॰ वजाबाकी दिली आहे, या पासून त्रिकोण कर.

२८ उंची, पाया कडील दोन कोनांची वजाबाकी, आणि दोन बाजूंची बेरीज अ॰ वजाबाकी दिली आहे. या पासून त्रिकोण कर.

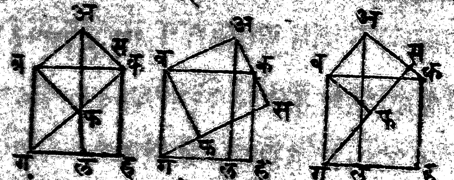
२९ उंची, पायाचा दोन खंडांची वजाबाकी, आणि दोन बाजूंची बेरीज अ॰ वजाबाकी दिली आहे, या पासून त्रि॰ कर.

३० उंची, शिरकोन, आणि सर्व बाजूंची बेरीज दिली आहे, यांपासून त्रिकोण कर.

प्रथम बुकाचे ४७वे सिद्धांताचे
प्रकार.

प्रकार १

का० त्रि० त कर्णाचा वर्ग दुसऱ्या दोन बाजूंचे वर्गांचे बेरजे बेरोबर आहे.



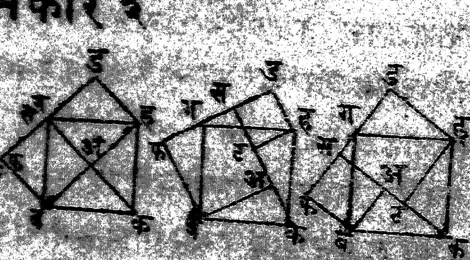
अबक का० △ त बक² = अक² + अब² होईल.

बकवर बइ वर्गकर. जेव्हां अब, अकचे बरावर, अधिक, किंवा उणी असेल, तेव्हां स बिंदु क बिंदूवर, किंवा अक रेषेचा बाहेर, किंवा आंत असेल.

ग, फ सांध. (१म०प्र०) ∠ अबफ = ∠ कबय आहे, यांतून साधारण ∠ कबफ वजा केल्या ∴ ∠ अबक = ∠ फबग (१बु० ४सि० प्र०) अबक आणि फगब हे △ समकोण ∴ ∠ बअक = ∠ बफग ∴ ∠ बफग का० आहे. आतां ∠ बफग + ∠ बफस = २का० ∴ गफस सरळ रेघ आहे ∵ बअ, गस स० आहे ∴ (१बु० २५सि० प्र०) बस = अग तसेंच अग = बल ∴ (१म० प्र०) बल = बस अ० अब² याप्रमाणेंच अक² = कल ∴ (२म० प्र०) अब² + अक² = बक² हें सिद्ध.

प्रकार २

एथें कर्ण वर्ग △ वरकर. अब वर बफ व बफ वर गफ लंब कर. फ पासून तिअवर हड लंब कर. अक



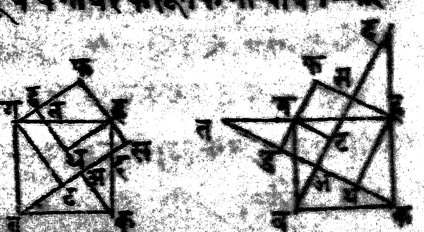
फड रेघेस स स्थळीं मिळे पर्यंत वाढीव. हट लंब कर.

अबक, फबग, डहग, हटक हे △ एकरूप आहेत, असें १ बु. २१ व २६ सि. चे आधारें सिद्ध होतें ∴ अफ, हस हे अब, अक चे वर्ग आहेत.

आतां फबग △ + डहग △ = अबक △ + हटक △ यांत साधारण अबगहट क्षेत्र मिळविल्यानें अफ + हस = बद ∴ अब² + अक² = बक² हें सि.

प्रकार ३

एथें एक बाजूचा वर्ग दुसऱ्या बाजूचे वर्गावर करून कर्णाचा वर्ग △ कर अब, कह बाजू ह स्थळीं मिळत



पर्यंत वाढीव. ग, ह बिंदूंपासून बद वर गट, हस लंब कर, ह स वाढवून निजवर गफ लंब कर, फह = फड कर आणि डथ, हथ क्रमें करून हफ, फड यांस लं. कर त्या थ बिंदूवर मिळतील. तसेंच डथ, गह रेघा वाढीव अशा कीं, त स्थळीं मिळतील.

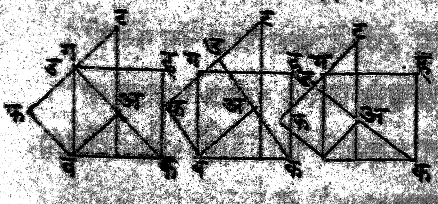
अबक △ = गटब △ = गफह △ आहे ∴ हथत △ + गडत △ = अकद △ + सहद △ ∴ फगह △ + हथत △ = फथ + गतड △ ∴ अबक △ + अकद △ = फथ + हसद △; परंतु गटब △ = गफह △ आहे ∴ (२ स्व.) बकद △ + बगट △ = फथ + हसद △ + फगह आहे.

जेव्हां अब > अक तेव्हां गटदह क्षेत्रें दोनही पेट्यांत मिळविलीं, तर बह = फथ + गस. जेव्हां अब < अक तेव्हां गटहद क्षेत्रानें दोन भाग होतात त्यांतील दोनही पेट्यांत पहिला मिळवून दुसरा वजा केल्या, तर बद = फथ + गस आहे ∴ बक² = अक² + अब² हें सिद्ध.

या सिद्धांताचे आणखी प्रकार होतात, ते अभ्यासी जनाची बुद्धि वाढावी, ह्मणून सिद्ध करितां आकृतींचीं मात्र त्यांनें दिग्दर्शन केलें आहे.

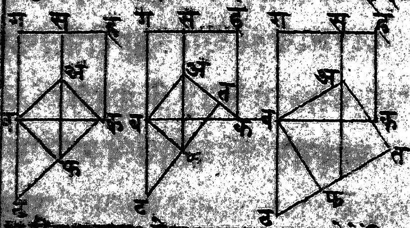
प्रकार ४

एथें कर्णवर्ग △ वर करून, १ वु॰चे ११, १२, २८, २९, २५ सि॰ व ११ वेस॰ यांचे आधारें सिद्ध होई.



प्रकार ५

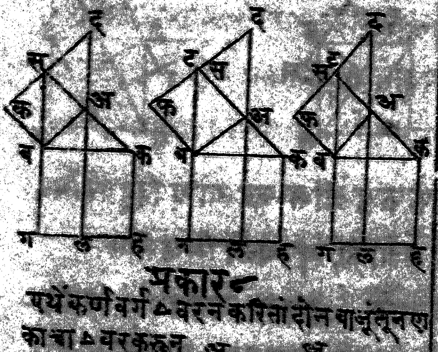
एथें कर्ण व एकेक बाजूचा वर्ग △ वर करून १ वु॰ २८, २५, २९ सि॰चे आधारें सि॰ होईल.



पुढील प्रकार २रे प्रकारा प्र॰ सम क्षेत्रें मिळवून व व आंक॰ सिद्ध होतील.

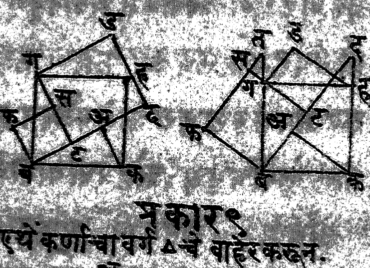
प्रकार ६

एथें कर्ण व एकेक बाजू याचे वर्ग △ बाहेर करून, १ वु॰ २५, २८ सि॰ फस॰ यांचे आधारें सिद्ध होईल.



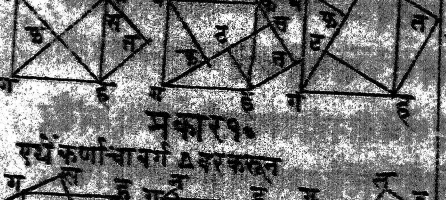
प्रकार ७

एथें कर्णाचा वर्ग △ वर करून.



प्रकार ८

एथें कर्णवर्ग △ वर न करितां दोन बाजूंतून एकाचा △ वर करून



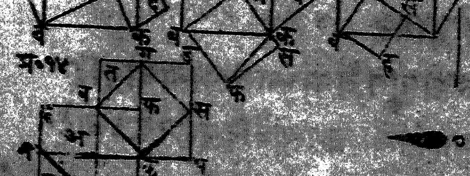
प्रकार ९

एथें कर्णाचा वर्ग △चे बाहेर करून.

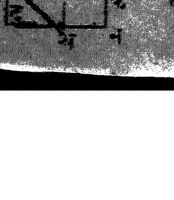


प्रकार १०

एथें कर्णाचा वर्ग △ वर करून

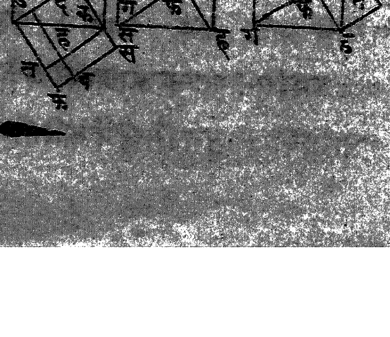


प्र॰१४



प्रकार ११ प्र॰१२ प्र॰१३

तीनही बाजूंचे वर्ग △ वर करून.



पहिल्या भागाची पुरवणी.

अंक संख्या लेखन वाचना विषयीं विचार.

व्यापारांत जा प्रमाणें पायल्यांचा फरक आहे, ह्मणजे राजापुरी; संगमेश्वरी, फडची कोलापुरी, सातारी इ॰ वयांचे कमजाजती पणा मुळें एकच धान्य तशी राजापुरी पायलीनें सहा मण, तोच संगमेश्वरी पायलीनें चार मण, फडच्या पायलीनें तीन मण कांहीं पायली इ॰ भरती. या प्रमाणें एकच अंक राशी २,३,४ , १०,१२ इ॰ अनेक मापांनीं मापिला जातो. या विषयीं उपपत्ति.

व्याख्या.

१ दोहोंनीं मापिले अंक राशीस द्विक्रम, तिहींनीं मापिले अंकराशीस त्रिक्रम रीति, इ॰ जा अंक मापानें राशी मापतात, तिनके क्रम रीति असें ह्मणतात; आणि हल्लीं चालू असे अंकांचें माप दाहा आहे, त्यास दशाक्रम रीति ह्मणतात.

२ दशाक्रम रीतीनें दहांनीं अंकराशीचें एक माप होतें, ह्मणून अंक नऊपर्यंत आहेत, व दाहांशीं हातचा एक होतो. या प्रमाणेंच एकादशक्रम, द्वादशक्रम व त्रयोदशादिक क्रम रीतीचे संख्येंत अनुक्रमें १०,११,१२ इ॰ पर्यंत अंक येऊन त्यांस स्वतंत्र अंक संज्ञा नसल्या मुळें ते भ्रम उत्पन्न करणारे होतील; याजकरितां त्यांस अ, ब, क इ॰ अक्षर संज्ञा देऊन, पुढें लिहिल्या रीतीनें अंक राशीचें मापन करावें.

अंकराशी मापाचे कोठक.

दशाक्रमरीतीचा	द्विक्रमरीतीचा	इष्ट+ क्रमरीतीचा.
१० एकं ह्मणजे १ दहं	२ एकं ह्मणजे १ दहं	इष्ट एकं ह्मणजे १ दहं

+ इष्ट ह्मणजे जा क्रमाची संख्या असेल ती अंक.

⁂ सोळा पायल्यांचा एक मण धरला ह्मणजे.

१० दहं	= १ शतं	२ दहं	= १ शतं	इष्ट दहं	=	१ शतं.
१० शतं	= १ सहस्र.	२ शतं	= १ सहस्र.	इष्ट शतं	=	१ सहस्र.
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०		इ०

द्विक्रम, त्रिक्रम, इत्यादि रीतींची घडामोड ह्मण
जे एके क्रमांतील अंकराशीस दुसरे क्रमांत नेणें.

रीति.— पूर्णांकांतील उतरती भांजणीचे रीतीनें ज्या क्रमाची संख्या असेल, त्या क्रमाचे कोष्टका प्रमाणें त्या संख्येचे एकं करून, ज्या क्रमांत नेणें असेल, त्या क्रमाचे कोष्टका प्रमाणें चढती भांजणीचे रीतीनें त्या एकंमास भारी नावाचे अंकांचें रूप द्यावें.

उदाहरणे.

(१) अष्टक्रमरीतीचे २६५ यांस पंचक्रम, सप्तक्रम आणि द्वादशक्रमरीतींत मांड.

```
शतं. दहं. एक.      एकं.              एकं              एकं
 २ .. ६ .. ५     ५)२४५             ७)२४५            १२)२४५
 ८               ५) ४९ दहं. ०एक.   ७) ३५ द. ० ए.    १२) २० द. ५ ए.
२२ दहं.          ५) ९ श. ४ दहं.      ५ श. ० द.         १ श. ८ द.
 ८                 १ सह. ४ श.
२४५ एकं.
                                    पं.क्र.  स.क्र.  द्वा.क्र.
                              उत्तरें १४४०,   ५००,    १८५
```

(२) ७६२५, ६२५४, २६६६ या अष्टक्रम संख्यांची बेरीज कर. आणि तीस दशक्र० रीतीचें रूप दे.

७६२५ + ६२५४ + २६६६ = २१०६७ याची दशक्रम रीतीनें बेरीज. ८७५९ हें उ०

दशक्रम रीतीचा संख्यांचा भागाकारा विषयीं विचार.

१ कोणत्याही संख्येवर ५ किंवा ० आहे, तर ती संख्या ५ नीं निःशेष भागिली जाईल.

२ कोणत्या ही संख्येवर जितकीं शून्यें असतील, तितकीं १ या अंकावर घेऊन जी संख्या होईल, तिनें ती पूर्व संख्या निःशेष भागिली जाईल.

३ कोणत्या ही संख्येवर १, २, ३, ४ इ० शून्यें आहेत, अथवा वरचे १, २, ३, ४ इ० अंक अनुक्रमें २, ४, ८, १६ इ० कांनीं निःशेष भागिले जातील; तर ती सर्व संख्या अनुक्रमें, २, ४, ८, १६ इ० यांनीं निःशेष भागिली जाईल.

४ कोणत्या ही संख्येंतील सर्व अंकांची बेरीज ३ किंवा ९ यांनीं निःशेष भागिली जाईल, तर ती संख्या अनुक्रमें ३ किंवा ९ यांनीं निःशेष भागिली जाईल.

५ कोणत्या ही संख्येंतील विषम स्थलींचे अंकांची बेरीज समस्थलींचे अंकांचे बेरजे बराबर आहे, तर ती संख्या ११ नीं व त्या संख्येवर शून्य असेल तर २२ नीं निःशेष भागिली जाईल.

६ कोणत्या ही संख्येवर शून्य किंवा सम अंक असेल, तर व वरील दोन शून्यें किंवा वरचे दोन अंक ४ नीं निःशेष भागिले जातील, तर आणि वरील तीन शून्यें किंवा ३ अंक ८ नीं निःशेष भागिले जातील अशा संख्या असून जर त्या प्रत्येक संख्येंतील सर्व अंकांची बेरीज ३ नीं निःशेष भागिली जाईल, तर ती संख्या अनुक्रमें ६, १२, २४ यांनीं निःशेष भागिली जाईल, आणि जर सर्व अंकांची बेरीज ९ नीं भागिली जाईल, तर ती संख्या १८, ३६, ७२ यांनीं निःशेष भागिली जाईल. आणखी जर सम आणि विषम स्थलींचे अंकांची बेरीज बराबर असेल, तर ती संख्या २२, ४४, ८८ यांनीं निःशेष भागिली जाईल.

या खालील कोष्टकांतील [illegible] सोळा [illegible] आहेत.

२५८	२५२	१३५	२०६	२५५	३५२	१२८	२२३	२४१	२६६	१४२	२०९	२४६	३६१	१३७	२१४
३१९	१५२	२१२	२११	१६२	१५२	३१२	२८८	२९६	१९५	३०५	३०२	२०१	१२०	३१०	२९७
३४४	२६३	२३१	१२०	३४१	२५६	२२४	२१७	३३७	२७०	२३८	११३	३४२	२६५	२३३	११८
२६७	१८४	२८०	३२०	१६०	१२१	२८७	३२०	१७४	१७७	२७३	३३४	१६९	१८२	२७८	३२९
२५५	२६२	१३८	२१३	२४२	३५५	१३१	२१०	२४२	३५५	१३१	२२०	२५३	३४६	१३२	२१९
२९२	१६१	३०२	२१८	२०५	१६६	३०६	३०१	१९५	१५६	३१६	२९१	१९६	१५५	३१५	२९२
३४१	२६६	२१४	११७	३३८	२६९	२३०	११४	३४८	२५९	२२७	१२४	३४७	२६०	२२८	१२३
१७०	१८१	२७७	३३०	१७३	१७८	२७४	३३३	१६३	१८८	२८४	३२३	१६४	१८७	२८३	३२४
२४४	३६३	१२९	२२३	२४९	३५८	१३४	२१७	२४७	३६०	१३६	२१५	२४०	३६७	१४३	२०८
१९३	१५८	३१८	२८२	१९८	१५३	३१३	२९४	२००	१५१	३११	२८६	२०७	१४४	३०४	३०३
३५०	२५७	२२५	१२६	३४५	२६२	२३०	१२१	३४३	२६४	२३२	११९	३३६	२७१	२३९	११२
१६१	१९०	२८६	३२१	१६६	१८५	२८१	३२६	१६८	१८३	२७९	३२८	१७५	१७६	२७२	३३५
२५३	३५४	१४०	२३१	२४४	३६३	१३९	२३२	२५०	३५७	१३३	२१८	२५१	३५४	१३०	२२१
२०६	१४७	३०७	३०१	२०१	१४८	३०८	२९९	१९७	१५४	३१४	२९३	१९४	१५७	३१७	२९०
३५९	२५८	२३६	११५	३५०	२६७	२३५	११६	३५६	२६१	२२९	१२२	३४९	२५८	२१६	१२५
१७२	१८९	२७५	३२१	१७१	१८०	२७६	३३१	१६५	१८६	२८२	३२५	१६२	१८९	२८५	३२२

तिसऱ्या भागाची पुरवणी

असमपदें.

असमपद > याहून जास्ती, किंवा < याहून कमी या चिन्हानें दाखवितात. जसें, ५>३, ८<९, अ॰अ > ब, ब < अ हीं असम पदें आहेत.

उदाहरणें.

(१) कोणताही सम अपूर्णांक आणि त्याचा व्युत्क्रम यांची बेरीज २ हून अधिक आहे.

अ आणि ब हीं असमपदें आहेत, तर $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{अ} > २$ होईल.

आतां अ आणि ब यांचें अंतर दाखवायास क घे, तेव्हां ब = अ + क यांस ब नें आणि अनें भागून, $१ = \frac{अ}{ब} + \frac{क}{ब}$ ......(१), $\frac{ब}{अ} = १ + \frac{क}{अ}$ ....(२)

न॰ समी॰ स स्य॰ क॰ $\frac{अ}{ब} = १ - \frac{क}{ब}$ ......(३) तु॰ आणि वि॰ स॰ यांचीमि॰

क॰ $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{अ}=२+\frac{क}{अ}-\frac{क}{ब}$ परंतु $\frac{क}{अ}>\frac{क}{ब}$ आहे, कारण दोहोंचे अंश सारखे असून दुसऱ्याचा छेद पहिल्याचे छेदाहून मोठा आहे, याजकरितां दुसरे पदाची किंमत सहजच प्रथम पदाचे किमती पेक्षां लहान आहे; ह्मणून $\frac{क}{अ}-\frac{क}{ब}$ ही बाकी धन आहे, याजकरितां $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{अ}=२+$ कांहींतरी धन आहे, ह्मणून $\frac{अ}{ब}+\frac{ब}{अ}>२$ आहे हें सिद्ध.

(२) २क्ष−१० < क्ष+१, आणि ४क्ष+२ > २४−२क्ष आहे, तर क्षची पूर्ण किंमत.

उत्तर क्ष=५

अनियतसमीकरणें.

समीकरणांत जितकीं अव्यक्तपदें असतील तितकीं समीकरणें असल्यास प्रत्येक पदाची एकएक किंमत निघती, परंतु समीकरणें अव्यक्त पदांचा संख्येपेक्षां थोडीं असल्यास किमती अनंत निघतात-त्यांत पूर्णांक किंवा धनउत्तरें असावीं किंवा वर्गघन असावें, इत्यादि नियम केल्यास त्याउत्तरांचे संख्येस कांहीं नियम होतो.

रीति- अशा समीकरणांत लहान वेळा मकारकानें मोठा वेळा मकारक भागून पूर्ण पदें व अपूर्ण पदें वेगळीं लिहावीं; यांत अपूर्ण पदाबरोबर दुसरें एक अव्यक्त धरून छेद सोडवून पूर्व प्रमाणें छतिचालवावी. याच रीतीनें एका अव्यक्त पदाचा वेळा मकारक एक, व दुसऱ्याचा पूर्णांक होई पर्यंत वारंवार करून, शेवटील पदाबरोबर ०,१ इत्यादि इष्ट धरावें, आणि त्यापासून अनुक्रमें किमती काढीत जाव्या, ह्मणजे सांगितल्या अव्यक्त पदाचा किमती निघतील.

+ उदाहरणांत तपशील केल्या प्रमाणें.

उदाहरणें.

(१) ५क्ष+७य=२९ एथें क्ष, य अव्यक्त पदांचा किमती काढ.

आतां $क्ष+य+\frac{२य}{५}=५+\frac{४}{५}$ ∴ $क्ष=५-य+\frac{४-२य}{५}$, $\frac{४-२य}{५}=प$ ∴ $४-२य=५प$, $२-य=\frac{५प}{२}=२प+\frac{प}{२}$, $\frac{प}{२}=स$ ∴ $प=२स$.

आतां $य=२-५स$ आणि $क्ष=५-य+प=३+५स+२स=३+७स$

एथें जर स=० तर क्ष=३ आणि य=२, जर स=१ तर क्ष=१० आणि य=-३; जर स=-१ तर क्ष=-४ आणि य=७ इत्यादि.

(२) जा संख्येस ३, ४, ५ यांनीं भागिलें असतां अनुक्रमें २, ३, ४ बाकी रहातात ती संख्या कोणती?

क्ष = संख्या घे. $\frac{क्ष-२}{३}=प$ = पूर्णांक ∴ $क्ष=३प+२$, दुसरे संकेतापासून $\frac{क्ष-३}{४}$ अथवा $\frac{३प-१}{४}=क$ = पूर्णांक म्हणजे $३प-१=४क$ अथवा $प=क+\frac{क+१}{३}$, $\frac{क+१}{३}=र$ घे, तर $क=३र-१$ तेव्हां $प=४र-१$ आणि $क्ष=३प+२=१२र-१$; तिसऱ्या संकेताप्रमाणें $\frac{क्ष-४}{५}$ अथवा $\frac{१२र-५}{५}$ = पूर्णांक म्हणजे $२र+\frac{२र}{५}-१$ पूर्णांक ∴ $\frac{२र}{५}$ = पूर्णांक.

$\frac{२र}{५}=२म$, घे; तेव्हां $र=५म$, आणि $क्ष=१२र-१=६०म-१$ जर म=१, क्ष=५९, जर म=२, क्ष=११९ इत्यादि.

(३) ४क्ष+३य+१०=५ज्ञ या समीकरणांत क्ष, य आणि ज्ञ यांच्या किमती काढ.

वरील समीकरण ३नीं भागून, $क्ष+य+३+\frac{क्ष+१}{३}=ज्ञ+\frac{२ज्ञ}{३}$, $य=ज्ञ-क्ष-३+\frac{२ज्ञ-क्ष-१}{३}$, $\frac{२ज्ञ-क्ष-१}{३}=प$ घे, तर $२ज्ञ-क्ष-१=३प$ तेव्हां $क्ष=२ज्ञ-३प-१$ आणि $य=ज्ञ-२ज्ञ+३प+१-३+प=४प-ज्ञ-२$ यांत ज्ञ आणि प यांच्या ठिकाणीं कोणत्याही पूर्णांक किमती लिहिल्या असतां क्ष, य यांच्या किम

ती निघतील. जर प=० आणि ज्ञ=१ केला तर क्ष=१ आणि य=-२

(४) दोघां मुलांचे जवळ एकंदर १०० पैसे होते. त्यांत पहिल्यानें आपले आठ आठ मोजिले तेव्हां ७ बाकी राहीले, आणि दुसऱ्यानें आपले दहा दहा मोजिले तेव्हां ७ बाकी राहिले. याजवरून प्रत्येकाजवळ किती किती पैसे होते?

क्ष = पहिल्याजवळचे पैसे, तर १००-क्ष = दुसऱ्याजवळचे पैसे.
(क्ष-७)/८ = पूर्णसंख्या, = म घे, ∴ क्ष = ८म+७, (९३-क्ष)/१० = (८६-८म)/१० = (४३-४म)/५ = ८-म+(म+३)/५, (म+३)/५ = न घे ∴ म=५न-३ आणि क्ष=४०न-१७, न=१ घे तर क्ष=२३.

तेव्हां पहिल्याजवळ २३ पैसे व दुसऱ्याजवळ ७७ पैसे होते.

(५) तीन रुपयांस ५ पारवे, ५ रुपयांस ७ सारवे, ७ रुपयांस ९ हंस आणि ९ रुपयांस तीन मोर असे येत असतां, एका गृहस्थानें १०० रुपयांस १०० पक्षी आणिले, त्यास प्रत्येकजातीचे किती किती आणिले?

पारवे	सारवे	हंस	मोर
५	५६	२७	१२
२०	४१	२८	११
६०	२८	१८	१४

(६) तीन किल्ले होते. त्यांत ज्या किल्ल्यांत थोडी फौज होती त्यावर शत्रूनें हल्ला केला, तेव्हां त्या किल्लेदारानें दुसऱ्या दोघांस असें सांगितलें कीं, मजजवळची फौज इतकी आपल्यांतून मला कुमक द्यावी, त्याप्रमाणें त्याणें कुमक घेऊन शत्रू हटविला, पुढें शत्रू दुसरे किल्ल्यावर गेला तेथील किल्लेदारानें आपले इतकाली फौज दुसऱ्या दोघांकडून कुमक घेऊन शत्रूस मागें हटविलें. पुढें शत्रू तिसरे किल्ल्यावर गेला तेथील किल्लेदारानें ही असेंच केल्यामुळें तीन ही किल्ल्यांत सारखी फौज झाली तर प्रत्येकाचे

ती किती फौज होती.

उत्तर, म०कि०१६२२४८ हु०कि०२८५६८४ ति०कि०३७,७४,११७

प्रश्नसमुदाय.

पूर्णांक.

(१) एका पलटणींत ५७४ शिपाई, २७ हवालदार, ५५ नाईक, १७ जमादार, ६ कपतान, १२ सुभेदार, २०० भिस्ती, ८८ न्हावी आणि ११० मोची इतकीं मनुष्यें आहेत, तर त्या पलटणींत एकंदर मनुष्यें किती?

उत्तर, १०८९ मनुष्यें.

(२) एका संख्येंतून ५२७ वजा केले असतां २९१ बाकी राहात्ये. ती संख्या कोणती?

उत्तर, ९२८

(३) दोन संख्यांचें अंतर ५१२ आणि त्यांतील लहान संख्या १३२ तर मोठी संख्या कोणती?

उत्तर, ६४४

(४) एका रकमेस १२२ मिळविले आणि त्या मिळवणींत ७५१८ वजा केले तर ४०० बाकी रहातात. तेव्हां ती रकम कोणती?

उत्तर ७३८६

(५) एका राजास पांच पुत्र व एक कन्या होती. ज्या वेळीं ती आपले नवऱ्याचे घरीं जावयास निघाली, त्या वेळीं राजानें तिला ५५५५५ रुपयांचा आंकडा घालून दिला. नंतर ती वडील भावास भेटावयास गेली. तेव्हां त्यानें डावेकडील प्रथम अंकांवर एक शून्य देऊन ती रकम वाढविली, दुसऱ्या भावानें दुसऱ्या अंकावर शून्य देऊन रकम वाढविली, या प्रमाणें पांचांनीं एकेक शून्य देऊन रकम वाढविली. शेवटीं कन्येनें

तीरकम खजानविसास दाखवून पूर्व वृत्तांत सांगितला, तेव्हां त्यानें प्रत्ये काचे नावें किती किती रुपये लिहावे.

उत्तर { राजाचेंनावें. व०पु० दु०पु० ति०पु० च०पु० पा०पु०
५५५५५, ५५०००००, ५५५५५०००, ५५५५५५०००, ५५५५५५५५०, ५५५५५५५५५.

(६) एक गृहस्थ कमळें घेऊन देवांस गेला. त्यांतील कमळें देवास घालू न शिल्लक रहात, तितकीं तोडसनीं घेत असे. त्यानें ४ देवांस प्रत्येकीं १६ कमळें घातलीं आणि शेवटीं घरीं रिकामा गेला तेव्हां प्रथम त्यानें कितीं कमळें नेलीं होतीं? उत्तर ३० क०

(७) तीन संख्या शोधून काढ, जांस अनुक्रमें ७२५, ३२१८ आणि ६४९ यांनीं भागिलें असतां भागाकार ६८७४, २३२१ आणि ७५१२ येतात.
उत्तरें ५०५२२९०, ७४६८९७८, ४४७२०८

(८) ९४२२ गुण्य, २९०२ गुणक यांचा वेग, कोष्ठकी, धांवरा आणि ज्योतिषी अशा वेगळाल्या रीतीनीं गुणाकार कर. उत्तर ३६८०२६६४

(९) दोन शहरांत अंतर १४० मैल आहे, आतां त्या दोन शहरांहून अ आणि ब परस्पर भेटावयास निघाले. अ, ब पेक्षां ४ मैल दररोज जास्त चालतो. पुढें त्यांची १४ दिवसांनीं मार्गांत गांठ पडली, तेव्हां ते दररोज किती मैल चालले? उत्तर, अ ७ मैल, ब ३ मैल.

(१०) २ खंडी २ मण ५ शेर तेल आहे, यांतून ६, ५, ४ शेरांचीं तीन भांडीं समतेनें किती वेळां भरून निघतील? उत्तर, ११५ वेळां

(११) दोन शहरामध्यें अंतर ४८१ मैल आहे, आतां एका शहराकडून अ आणि दुसरीकडून ब हे दोन मनुष्य निघाले ते अनुक्रमें ६, ७ मैल चालतात, तर त्यांस भेट होण्यास व स्थळांचा व्यत्क्रम होण्यास किती दिवस पाहिजेत? उत्तर, भेट ३७, अचा प्रु० ८० ब्रचा प्रु० ६८ ⁶/₇

१२ एक मनुष्य ३६० मैल गेला; तो असा कीं, ५ मैल गाडींतून तर ४ मैल पायांनीं व ११ मैल घोड्यावरून. तेव्हां प्रत्येक जातीची त्याची चाल किती झाली?

उत्तर गा. ९०, पा. ७२, घो. १९८ मैल.

(१३) त्या तीन संख्या कोणत्या आहेत. जांत प्रथम तिसरीचे तिप्पट आहे, आणि जवळजवळचे दोन संख्यांचे अंतरांचें अंतर दोन आहे.

उत्तर (०)

(१४) त्या तीन संख्या कोणत्या आहेत. जांत प्रथम दुसरीचे विसपट आहे, आणि जवळजवळचे दोन संख्यांचे भागाकारांचा भागाकार २६५ आहे.

उत्तर (०)

(१५) २॥ भागाकार येण्यास ५०२ यांस किती पैनीं भागावें.

उत्तर ४६ पै.

(१६) ११ हात लांब २ हात रुंद ५ हात उंच अशा २८ स पेट्यांस कापड लावणें आहे, त्यास ४ हात रुंदीचें कापड किती हात लांब लागेल?

उत्तर १४४२ हात.

(१७) एका जासूदानें दर रोज ३ मैल प्रमाणें २५५ मैल लांबीचे गांव्यास जाऊन भोजन खर्चा बद्दल पांच रुपये घेतले व दुसरे वेळेस जलदी करितां दररोज ५ मैल प्रमाणें जाऊन पूर्वी इतका भोजन खर्च व दररोज २ आणे प्रमाणें भत्ता घेतला; तेव्हां त्याजवळ जलदी चालल्यामुळें शिल्लक किती राहिली?

उत्तर ०रु. ६ आणे.

(१८) एका गृहस्थाचा घरीं अ, ब, क या तिघांस २, ३, ४ या प्रमाणानें द्रव्य मिळालें, त्यात कला ६०० रुपये मिळाले, यावरून अ आणि ब यांस किती किती रु. मिळाले? व सर्व द्रव्य किती होतें?

उत्तर सर्व १३५० अ ३००, ब ४५० रुपये.

(१९) एक मनुष्य ३० रुपये दरमहा पगार असतां १५ रुपये खर्च करीआणि २० रुपये पगार झाला तेव्हां २५ रुपये खर्च करी, पुढें एक वर्ष झाल्यावर त्याजवळ १०० रुपये शिल्लक राहिले, तेव्हां निरनिराळे पगाराची किती किती महिने चाकरी झाली?

उत्तर २० रु० ४ म० ३० रु० ८ महिने.

(२०) अ, ब, क या तिघांनीं एका सावकाराकडून कांहीं रुपये दरमहा दरशेंकडा २, ४, ६ रुपये व्याजाचे दरानें नेऊन एक वर्षांत सर्वांनीं ५५०९ रुपये रास आणून दिली. त्यांत त्यांचा व्याजाचा आकार सारखा होता; तेव्हां प्रत्येकाचें मुद्दल किती किती होतें?

उत्तर २चे ४५० रु०, ४चे २२५ रु०, ६चे १५० रु० मु०

(२१) एका मनुष्यानें ४, ८, १२ रु० महिना अशा करारानें ३ चाकर ठेविले, त्या तिघांनीं मिळून ४ म० १ दिवस चाकरी केली, व त्यांस सारखा रोजमुरा मिळाला, तेव्हां प्रत्येकाची चाकरी कितीकिती दिवस झाली.

	प० दि०	दु० दि०	ति० दि०
उत्तर	६६	३३	२२

(२२) कांहीं शिपाई एका किल्ल्यावर पहाऱ्यास ठेवावयाचे आहेत; ते ५० हात अंतरानें ठेविले असतां २०० हात किल्ला रिकामा राहतो, आणि ६० हातांवर ठेविले असतां १०० शिपाई शिल्लक रहातात, यावरून शिपाई किती व किल्ल्याची लांबी किती असावी?

हात.

उत्तर, शि० ६२०० कि० लां० ३१००००

(२३) कुत्रा आणि ससा हे एके सरळ रेषेंत १० यार्ड अंतरानें उभे होते, ते दोघे ही दरसेकंदास ५ पावलें पळूं लागले, तेव्हां २० मिनुटांनीं कुत्र्यानें सशास धरिलें. यावरून त्या दोघांचे पावलांत अंतर किती हो

तें?   उत्तर $\frac{3}{5}$ इंच

(२४) ५ अवर ४ मिन्युटांनीं सूर्योदय होत असतां, एक मनुष्य २० दिवसांनीं एके मुकामास पोंचतो, तोच मनुष्य ६ अवरांनीं सूर्योदय होत असल्यास कितवे दिवशीं पोंचेल?   उत्तर, २३$\frac{1}{6}$ दि०

(२५) एक काम १६ मनुष्यांकडून कांहीं मुदतींत पुरे करविणें होतें; परंतु २ दिवसानंतर २ मनुष्यें मदतीस दिल्यामुळें २४ दिवसांत पुरें झालें, तर पूर्वसंकेत किती दिवसांचा होता?   उत्तर ४० दिवस.

(२६) २ फूट लांब १ फूट रुंद व १ फूट उंच अशा फव्यांत दीड मण भातर होतें, तर त्याच फव्यांची १ मण भातर ह्राविण्या साठीं उंची किती असावी? व एकेक मापांत फारफेर करून, त्याचा किती तऱ्हेनें पालट करितां येईल.

उत्तर तीन तऱ्हांनीं,   उंची ८ इंच.

(२७) एका मनुष्यानें ४०० हात लांब २ हात रुंद आणि ४ हात उंच अशी भिंत घालून ३२ रु० घेतले; दुसरे वेळेस त्यानें ८०० हा० लां० ४ हा० रुं० आणि ८ हात उंच अशी भिंत घालून, ७० रु० घेतले, तेव्हां त्याचा पूर्वीचे करारा प्रमाणें किती रु० नफा किंवा तोटा झाला?

उत्तर १८६ रु० तोटा.

(२८) एक कुरण ८ गाई ७२ दिवसांत खातात आणि ५ गाई व २ घोडे ६४ दिवसांत खातात; तर तेंच कुरण ३६ दिवसांत खाण्यास ३ घोड्यास किती गाई व चार गाईस किती घोडे मदत असावे?

उत्तर १० गाई, ६ घोडे.

(२९) एक सरदार २ दिवसांत लढाईवर गेला, त्यास वाटेंत घोड्यांचा वैरणीचा खर्च असा पडला कीं, पहिले दिवशीं ३ घोड्यांस २ रुपये; दु

दिवशीं ४ घोड्यांस २ रु॰ आणि तिसरे दिवशीं ५ घोड्यांस ४ रुपये, व एकंदर सर्वांचा आकार १२२ रु॰ झाला, तर त्याजवळ घोडे किती होते?
उत्तर ६० घोडे.

(२०) एका मुद्दलाची ४ महिन्यांनीं १२५ रु॰, व १० महिन्यांनीं १५० रु॰ रास होते तर मुद्दल व व्याजाचा दर काय होता?
उत्तर मु॰ रु॰ १२५, दरमहा दरशें २ रु॰.

(२१) आठ महिन्यांनीं ५२० रु॰ द्यावयाचे आहेत, ते एकोत्रा व्याज काढून आज देणें तर किती द्यावे.
उ॰ ५०० [illegible]

(२२) {५७३२ भाज्य नवांचे स्केलांत / ५०२ भाजक सहांचे स्के॰} आहेत, यांचा भागाकार १० चे स्केलांत कर.
उत्तर १९५ $\frac{११५}{१८२}$

अपूर्णांक.

(२३) रुपये २८५॥ ५॥ व पिंपे २५ चा॥ ११॥ यांचे ।२॥।२ आणि $\frac{३}{४}$ चे ($\frac{३}{४}$ + $\frac{१}{३}$) यांस बराबर भागाचें व्यवहारी अपूर्णांकाचें रूप दे.
उत्तर १५८ $\frac{५१७}{६१७४}$, ११ $\frac{२१८२}{१५२६०}$, $\frac{५६}{७५}$

(२४) [illegible], [illegible], [illegible] चे $\frac{३}{४}$ आणि [illegible] यांची मिळवणी कर.
उत्तर २८ $\frac{१३४२}{५८००}$

(२५) एका गांवांत ४ कोष्टी रहात होते, त्यांस एकेक वस्त्र तयार करण्यास अनुक्रमें ४, ५, ६, ७ दिवस लागत. त्या चार असामींनीं एकाच दिवशीं मागावर वस्त्रें लाविलीं, तर त्या दिवसापासून ते आपआपलीं वस्त्रें एकदम पुरीं करून कितवे दिवशीं भेटतील? व प्रत्येकाचीं किती किती वस्त्रें होतील?
उत्तर, ४२० वे दि॰ प॰ व॰ १०५.. दु॰ व॰ ८४.. ति॰ व॰ ७०.. च॰ व॰ ६०

(३६) ६८ घोडे ३० दिवसांत जें कुरण खातात, तेंच ९० गाई ६० दिवसांत खातात; तर तेंच कुरण घोडा व १ गाय किती दिवसांत खातील?

उत्तर, १४८० $\frac{२०}{३१}$ दि०

(३७) विद्याभ्यास करणारे एका मुलास ६ फुटी चौरस जमीन लागते तर १६ मुलांचे अभ्यासास किती लांबी रुंदीची शाळा असावी? जींत पुस्तकें ठेवण्या करितां ११० फु० सामान ठेवण्या करितां १७२ फु०, आणि अभ्यास घेण्या करितां मोकळी जागा ११० फु० असली पाहिजे. व शाळेची रुंदी, लांबीचे निंमे असली पाहिजे.

उत्तर लां० फु० ४४ रु० फु० २२

(३८) एक मनुष्य २ घटिकेंत २ कोस ओझें नेऊन ५ आणे घेतो, तर तेंच ओझें २ घटिकेंत २ कोस व ३०० घटिकेंत २०० कोस नेऊन किती आणे घेईल?

उत्तर १ $\frac{१२}{२७}$ आणे, १ रु० ४ $\frac{४}{२७}$ आ.

(३९) एका उदम्यानें ३०० पौंडांस ९ घोडे व ७ गाई विकल्या, दुसरे वेळेस त्याच किमतीस ६ घोडे व १३ गाई विकल्या, तर प्रत्येक घोड्याची व गाईची किंमत काय?

उत्तर, घो० २४ गा० १२ पौंड.

(४०) अ आणि ब मिळून एक काम दररोज ६ अवर प्रमाणें ५ दिवसांत करितात व ब एकटा ९ अवर प्रमाणें ७$\frac{१}{३}$ दिवसांत करितो; तर १२ अवर प्रमाणें अ किती दिवसांत करील?

उत्तर, ४ $\frac{७}{१२}$ दि०

(४१) एका गृहस्थानें एका दिवशीं ६, ९ रु० व्याजाचे दरानें निरनिराळे रु० घेऊन २$\frac{१}{२}$ वर्षांनीं ८२५ रु० रास आणून दिली, त्यांत पहिल्या रकमेचा दुप्पट दुसऱ्या रकमेचें व्याज होतें. तेव्हां त्यांचे मुद्दल किती किती रु० होते?

उत्तर २००, ४०० रु०

(४२) एक काम कांहीं घटिका अ व त्या पेक्षां ४ घटिका अधिक ब मिळू न १६ घटिकेंत करितात, व अचा वेळा इतकें ब आणि बचा वेळा इतकें अ मिळून हें काम करितात. जर त्यांचे काळांत २ घटिकेचें अंतर ठेवून तें काम पुरें करणें आहे, तर किती किती घटिका करावें?

उत्तर, अ ६$\frac{९}{१०}$, ब ९$\frac{९}{१०}$ अ. १२$\frac{३}{१०}$, ब ९$\frac{३}{१०}$

(४३) ससा, कुतरा आणि वाघ हे सोळा सोळा हातांचे अंतरावर उभे होते. पुढें सशा मागें कुतरा लागल्यावर २४ मिन्युटांनीं वाघ उभयतां मागें लागला, तो दर मिन्युटांत २० हात चालतो व कुतरा १६ हात चालतो. शेवटीं ससा, कुतरा आणि वाघ हे एके ठिकाणींच जमले; याजवरून ससा दर मिन्युटांत किती चालला? उत्तर, १५$\frac{२७}{३१}$ हात.

(४४) ४४२ शेरांचा हांडा पाण्यानें भरलेला होता, त्यांतून अ आणि ब हे दोन भांडीं घेऊन पाणी काढावयास लागले; अ २ मिन्युटांत २ भांडीं काढी आणि ब २ मिन्युटांत २ भांडीं काढी, अचें भांडें बचे भांड्याचें दुप्पट होतें. तेव्हां तो हांडा १२ मिन्युटांत रिकामा झाला; तर प्रत्येक भांडें किती शेरांचें होतें? उत्तर २६, १३ शेर.

(४५) खालीं लिहिलेल्या रकमांचा रेघांचा रीतीनें, व्यवहारी अपूर्णांकाचे रीतीनें व दशांश रीतीनें बेरजा कर.

रुपये	कैली वारुळें.	वजन	तोळेवार
६७४॥ना८	ज१॥४॥=	४॥१॥ना९	१ज॥१॥१
४ज॥न॥॰	॰॥॰॥॥५=	३०।॰॥॥ज॥४	४॥॰॥१॥
६ज॥१	४॥३॥॰॥—	॰॥३॥४॥८	॰॥४॥॰॥॰
५॰॥	६५१=	४॥१॰॥॰	१॥१॥१॥॰

(४६) २३६.०।।२ यांस ·।।३। यांनीं दशांश रीतीनें भाग असें कीं, भागा कारांत दशांश स्थळें चार येतील. उत्तर, ४६७·५९७४

(४७) ·१ यास ·००००१ यांनें भाग उत्तर, १०००

(४८) ·५२८ यांस ३७१·८ यांनीं भाग असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें ५ होतील. उत्तर ·००१४२

(४९) एक दुकानदार १२ रुपयांस ६ मण, ५ रु॰ २ मण, ७½ रु॰ २¾ मण आणि ११½ रु॰ २ मण अशा भावांचे साखरेंत ११ रु॰ ची ७ मण, ३४ रु॰ ची ११ मण आणि २८ रु॰ ची १२ मण साखर घालून, तें मिश्र दर मणी ३ रु॰ प्र माणें विकावयास इच्छितो, तर प्रत्येक जातीची साखर किती किती घा लावी?

प॰ दु॰ ति॰ च॰ भावाची
उत्तर ७५-२०-·७५··७५ मण

(५०) दोन शहरांमध्यें अंतर २१६ मैल आहे, त्या दोन शहरांतून अ आणि ब हे दोन असूद एकदम निघाले, ते त्यांचे चालींचे बजाबाकी इतके दिवसांनीं परस्परांस भेटले, त्यावेळीं अ २०० मैल चालला हो ता; तेव्हां प्रत्येकाची चाल किती? उत्तर १००, ९८ मैल.

(५१) अ आणि ब या दोघांनीं मार्गांत जेवण केलें. त्यांत अचे तीन शेर व बचे दोन शेर तांदुळ होते. इतक्यांत त्यांचा मित्र क मनुष्य तेथें आ ला तेव्हां त्या तिघांनीं अन्न वांटून घेतलें तें असें, १ : २ :: अ : ब आ णि २ : ३ :: अ+ब : क, जातेवेळीं कनें दोन रुपये दिले ते दोघांनीं कस कसे वांटून घ्यावे? उत्तर अला १० आ॰ ८ पै ब॰ १ रु॰ ५ आ॰ ४ पै.

(५२) अ, ब आणि क या तिघांनीं एका व्यापारांत पुढें सांगतो याप्र माणें भांडवल घालून २०८० रु॰ जमविले. त्यांस व्यापारा अंतीं ६०८ रु॰

नफा मिळाला तर प्रत्येकानें कसा वाटून द्यावा. जर ९अ+९ब=७ब+७क आणि ८ब-८अ= अ+क या प्रमाणें मुद्दल असेल.

अ ब क.
उत्तर १५ $\frac{३}{२०}$, २० $\frac{३}{१५}$, २५ $\frac{३}{१२}$ रु.

(५३) ५० हात लांब ५० हात रुंद अशा जाग्यांत १००० हांड्या ठेवितां येतात तर २००० हांड्या ठेवायास किती लांबीची चौरसाकृति असावी?

उत्तर, ७०.७१०६ लांबी, ७०.७१०६ रुंदी.

(५४) ते अपूर्णांक काय आहेत कीं, जांचे अंशांत ७ वजा केले; तर $\frac{५}{११}$ बाकी राहातात आणि छेदांस ११ नीं भागिलें तर त्याची किंमत ६ होते. उ. $\frac{५२}{७७}$

(५५) एक घोडी प्रथम दिवशीं १५ कोस दु. दि. विश्रांति घेऊन, तिसरे दि. २० कोस या प्रमाणें ५ उत्तरानें चढती चाले, आणि शिंगरूं प्रथम दिवशीं २$\frac{१}{२}$ दुसरे दिवशीं ५ या प्रमाणें २$\frac{१}{२}$ उत्तरानें चढतें चाले; तर त्यांची गांठ निघाल्या पासून कितवे दिवशीं पडेल? उत्तर ११ दि.

(५६) अ जवळ १५ मोत्यें आणि क जवळ ११ हिरे होते; त्यांतून अनें ५ मोत्यें कला दिलीं आणि कनें ४ हिरे अला दिले. पुढें त्यांची त्यांनीं विकरी केली त्या वेळीं प्रत्येकास ४४५० रुपये मिळाले; तेव्हां मोत्यें व हिरे याची किंमत काय? प्रत्येकीं मोत्यें व हिरे सारखे किंमतीचे होते.

मो. किं. हि. किं.
उत्तर २६७ ४४५ रु.

(५७) ती अंकरूप आकृति काय आहे? जींत ३६ वजा केले तर व्युत्क्रम स्थिती होते, आणि जिला मूळ दोन अंकांचे बेरजेनें भागिलें तर ७$\frac{३}{११}$ भागाकार येतो. उत्तर, ८०

(५८) एका पदार्थाची उष्णता मुळचे पेक्षां दर रोज २ अंश जास्त वाढू

लागलीं व शेवटील दिवशीं १८ अंश वाढली आणि वाढूं लागल्या दिवसा पासून शेवटील दिवशीं पर्यंत एकंदर ९० अंश वाढली, तर ती किती दिवस वाढत होती? उत्तर, ९ दि॰

(५९) कांहीं मुलांनीं नऊनऊ पृष्ठें वाचून एक पुस्तक संपविलें, दुसरे दिवशीं ७ मुलें कमी झाल्यामुळें तें पुस्तक संपविण्यास प्रत्येक मुलांस ७ पृष्ठें जास्त वाचावीं लागलीं; तर पुस्तक किती पृष्ठांचें होतें?

उत्तर, १४४ पृ॰

(६०) एकानें आपलें सर्व द्रव्य अ, ब, क यांस दिलें तें असें - अला सर्व द्रव्याचे $\frac{3}{4}$ हून १५० रु॰ कमी, बला $\frac{2}{3}$ हून ५० रु अधिक आणि कला ५० रु॰ तर तें सर्व द्रव्य किती होतें? उत्तर, ७५० रु॰

बीजगणित.

(६१) गणित श्रेढींतील तीन संख्या काढ अशा कीं, पहिली आणि दुसरी यांचे बेरजेचा $\frac{1}{2}$ आणि पहिली आणि तिसरी यांचे बेरजेचा $\frac{1}{3}$ हे आठ या संख्ये बरोबर आहेत. उत्तर २०, १२, ४

(६२) एका सरदारानें आपली फौज चौरसाकृति उभी केली तेव्हां १२८ मनुष्यें शिल्लक राहिलीं; ह्मणून वर्गाचे बाजूंत एक मनुष्य वाढविलें तेव्हां ९१ मनुष्यांचा तोटा आला; तेव्हां फौज किती होती?

उत्तर, १२००९

(६३) भूमिति प्रमाणांत त्या चार संख्या काय आहेत? कीं ज्यांत पहिली आणि दुसरी यांची वजावाकी १५ आणि तिसरी व चवथी यांची वजावाकी ५४० आणि ज्यांची बेरीज ७७७

उत्तर, ३, १८, १०८, ६४८

(६४) अ आणि ब या दोन गांवांहून क आणि ड हे दोन जासूद निघाले [illegible] टेनें परस्परांस भेटले, तेव्हां असें समजलें कीं, क जितका चालला [illegible] पेक्षां १८ मैल कमी ड चालला. पुढें कला ब गांवी जाण्यास २५ मि[illegible] वडला अ गांवीं जाण्यास ६ [illegible] मि॰ लागलीं; तर त्या दोन गांवां त अ[illegible] किती व प्रत्येकाची दर मिनुटांत चाल किती?

उत्तर, १५०, अ, ७, ब, २ मैल.

(६५) जो [illegible] वर्ग घनाचे दुप्पट अशी संख्या कोणती? उत्तर, २

(६६) एका [illegible] अ, ब हे दोघे चाकर निर निराळे दरानें एकदांच ठेवून ए काच दिवशीं [illegible] दिले, त्यावेळेस अचे ६ दिवस खाडे झाले होते म्हणून त्याला ४९ रु॰ मि[illegible]ळे व बला १०० रु॰ मिळाले, परंतु असें समजलें कीं, अचे ६ दिवस खा[illegible] होतां बचे होते तर त्यांस सारखे रु॰ मिळाले असते. तेव्हां पूर्वी प्र[illegible]कांची किती दिवस चाकरी झाली होती?

उत्तर, अ॰ १२, ब २० दि॰

(६७) एक सरदार रा[illegible] भेटीस निघाला, त्या राजाचे वाड्यास ५ दर वाजे होते त्या प्रत्ये[illegible]र नि-निमे फौज ठेवून बाकी फौज आंत घेऊन गेला, राजानें त्या फौजेस पहिल्यास १ दुसऱ्यास २ या प्रमाणें एकउत्त रानें चढती पागोटीं दिलीं; नंतर त्या सरदारानें बाहेर येऊन प्रत्ये[illegible] एक एक या प्रमाणें देतां ती पागोटीं सर्व फौजेस पुरलीं तेव्हां सर्व[illegible] किती होती?

उत्तर, २०१६ स[illegible]

(६८) अ आणि ब हे दोन जासूद मुंबईहून धारवाडास ज[illegible] तां भिन्न काळीं निघाले; त्या दोघांची दर चाल सारखी [illegible] च रस्त्यानें गेले. पुढें धारवाडापासून [illegible]० मैलांवर अ[illegible]

ला तो दोन तासांत ३ मैल चालतो. अ आणखीं दोन तास चालल्
त्यास एक छकडा भेटला तो ४ तासांत ९ मैल चालतो पुढें तो च ला
धारवाडा पासून ४५ मैलावर भेटला व ३१ मैलांवर येण्याच ४० मि
न्युटें त्यास तो छकडा भेटला. यावरून अ धारवाडास पों व्हां ब
धारवाडा पासून किती अंतरावर होता?

उत्तर, २५ अंतर.

(६९) त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत ज्यांची वजाबाकी त्यांचे हून १ नें अधि
क आहे आणि ज्यांचे वर्गांची बेरीज ६७ आहे. उत्तर

(७०) एक काटकोन चौकोणा कृति गोळ्यांची रा आहे, जिचे पायांती
ल लांबी बाजूचे एक रांगेतील गोळे ४० आहेत त्या आकृतींत ग-
णित त्रिकोण १५ आहेत, तेव्हां त्या सर्व राशींत ळे किती आहेत?

उत्तर, १०४००

(६१) (७१) एका मनुष्यास वर्षाची प्राप्ति ५०० रु आहे, ती सावकारास लावून
री यांचे देऊन ३२०० रु० घेणें आहेत, तर किती व प्राप्ति पून द्यावी? म्हणजे सा
ठ या संख्य वकारास दर शेंकडा ८ रु० व्याज मिळेल उ. ९.२२१७ वर्षे.

(६२) एका दरसाल द० शे० ४ रुपये चक्रवाढ व्याजाचे दरानें कांहीं मुद्दल दुप्पट
मनुष्यें शिल्लक स किती वर्षे मुदत पाहिजे? उत्तर, १७.६ वर्षे.

त्या ९१ मनुष्यांचा रुपये दराचा मोहोरा आणि ५ रु० दराच्या पुतळ्या देऊन २०००
फेडणें आहे, तें किती प्रकारें फेडतां येईल? उत्तर ९९ तऱ्हांनीं

(६३) भूमिति प्रमाणे व्याज दरसाल दर शेंकडा ५ पौंडा प्रमाणें ५ वर्षे चालणाऱ्या
आणि दुसरी यांची बेरीज ची आज काय किंमत होईल? पौं० शि० पे०
बाकी ५४० आणि ज्यांची उत्तर १७२ ... २ ... ७

उत्तर, २,